Revista de Pedagogía
versión impresa ISSN 0798-9792

Rev. Ped v.24 n.70 Caracas mayo 2003

Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas

Strategies for the learning and teaching of mathematics

Castor David MORA

Universidad Central de Venezuela
Instituto Normal Superior Simón Bolívar (La Paz, Bolivia)
dmora@caoba.entelnet
dmora@euler.ciens.ucv.ve

RESUMEN

En las últimas dos décadas del siglo XX y durante los primeros años del presente, la educación matemática ha experimentado un desarrollo muy importante tanto cualitativa como cuantitativamente. Este avance ha tenido lugar, en la mayoría de los casos, en el ámbito teórico, sin consecuencias significativas para grandes sectores de la población. La explicación de este fenómeno podría estar, por una parte, en la escasa comunicación entre los docentes de aula y los "teóricos" de la educación matemática y por otra en que los docentes durante su formación y actualización aún no dispondrían de suficiente información sobre estrategias didácticas para el desarrollo apropiado del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. El presente trabajo pretende abordar algunos aspectos relacionados con los nuevos desarrollos y puntos de vista sobre diversas estrategias para el tratamiento de las matemáticas en los diferentes ámbitos del sistema educativo. El trabajo empieza con una descripción detallada sobre la complejidad de la enseñanza de las matemáticas. Después, se discute un conjunto de elementos inherentes a los métodos y contenidos matemáticos específicos. Posteriormente, se trabajan algunos puntos concernientes a los principios didácticos que caracterizan a la educación matemática moderna y, finalmente, se consideran siete concepciones para el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de esta disciplina.

Palabras clave: Educación matemática, formación general básica en matemática, innovación didáctica, métodos y estrategias para el aprendizaje y la enseñanza, enseñanza por resolución de problemas, enseñanza por proyectos, enseñanza mediante aplicaciones y modelación.

ABSTRACT

In the last two decades of the 20th. century and during the first years of the present one, mathematical education has experienced a very important development, both quantitative as qualitative in nature. This advance, nevertheless, has taken place mostly in a purely theoretical scope, without significant consequences for great sectors of the population. The explanation of this phenomenon could reside, fundamentally, in the scarce communication between classroom teachers and the "theoreticians" of mathematical education. Also we could consider that, through their pre-service and in-service preparation, teachers have not received enough information about appropriate didactical strategies for mathematical teaching and learning at the schools. The present article tries to approach some very important aspects related to the new developments and points of view on strategies for mathematical education through the different levels of the educative system. The article begins with a detailed consideration of the complexity of mathematical teaching. Later, a set of

elements inherent to the methods and specific contents of mathematics are discussed, followed by a reflection on some points related to the didactical principles which characterize modern mathematical education. Finally, seven different conceptions for the development of the teaching and learning processes of this discipline are presented.

Key words: Mathematical education, didactical innovation, teaching and learning methods and strategies, problem-based learning, project-based learning, learning through applications and modelization.

1. Introducción

El proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas[1] en las instituciones escolares, especialmente en la escuela básica -en sus tres ciclos- y en la educación secundaria, se ha convertido, durante los últimos años, en una tarea ampliamente compleja y fundamental en todos los sistemas educativos. No existe, probablemente, ninguna sociedad cuya estructura educativa carezca de planes de estudio relacionados con la educación matemática (Bishop, 1988; Mora, 2002).

Las profesoras y profesores de matemáticas y de otras áreas del conocimiento científico se encuentran con frecuencia frente a exigencias didácticas cambiantes e innovadoras, lo cual requiere una mayor atención por parte de las personas que están dedicadas a la investigación en el campo de la didáctica de la matemática y, sobre todo, al desarrollo de unidades de aprendizaje para el tratamiento de la variedad de temas dentro y fuera de la matemática.

Si bien es cierto que la mayoría de los trabajos escritos sobre la educación matemática se refieren a la enseñanza, quedando poco espacio para la reflexión sobre el aprendizaje, también es cierto que escasamente se han puesto en práctica muchas de las ideas didácticas desarrolladas y validadas en los últimos años. Podríamos citar, por ejemplo, la resolución de problemas (Schoenfeld, 1985; Guzmán, 1993; Sánchez y Fernández, 2003), la enseñanza por proyectos (Mora, 2003a; Da Ponte, Brunheira, Abrantes y Bastos, 1998), la enseñanza basada en las estaciones (Mora, 2003b), los juegos en la educación matemática (Fernández y Rodríguez, 1997), la experimentación en matemática, la demostración (Serres, 2002; Mora 2003c), las aplicaciones y su proceso de modelación (Blum, 1985; Mora, 2002), etc. Las fundamentaciones teóricas de cada una de estas concepciones de enseñanza y, obviamente, de aprendizaje son muy amplias, y se nutren sustancialmente de diferentes disciplinas relacionadas con la pedagogía, la didáctica y las áreas afines a la matemática propiamente dicha.

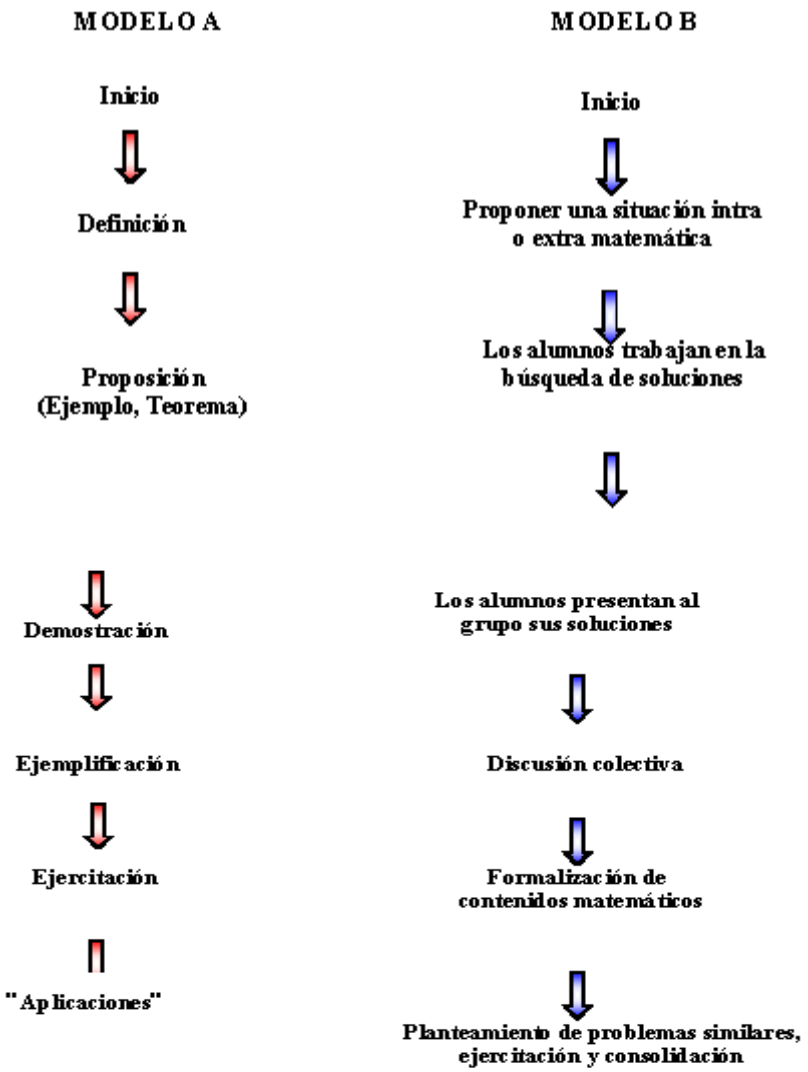
Quienes están vinculados con la didáctica de las matemáticas consideran que las y los estudiantes deben adquirir diversas formas de conocimientos matemáticos en y para diferentes situaciones, tanto para su aplicación posterior como para fortalecer estrategias didácticas en el proceso de aprendizaje y enseñanza. Ello exige, obviamente, profundizar sobre los correspondientes métodos de aprendizaje y, muy particularmente, sobre técnicas adecuadas para el desarrollo de la enseñanza. Estos métodos y técnicas pueden ser categorizados en grandes grupos, lo cual será uno de los objetivos del presente trabajo.

La enseñanza de la matemática se realiza de diferentes maneras y con la ayuda de muchos medios, cada uno con sus respectivas funciones; uno de ellos, el más usado e inmediato, es la lengua natural (Beyer, 1994; Skovsmose, 1994; Serrano, 2003). En la actualidad, la computadora y sus respectivos programas se ha convertido en el medio artificial más difundido para el tratamiento de diferentes temas matemáticos que van desde juegos y actividades para la educación matemática elemental hasta teorías y conceptos matemáticos altamente complejos, sobre todo en el campo de las aplicaciones. Esos medios ayudan a los docentes para un buen desempeño en el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza.

Se puede caracterizar la enseñanza como un proceso activo, el cual requiere no solamente del dominio de la disciplina, en nuestro caso de los conocimientos matemáticos básicos a ser trabajados con los estudiantes y aquellos que fundamentan o explican conceptos más finos y rigurosos necesarios para la comprensión del mundo de las matemáticas, sino del domino adecuado de un conjunto de habilidades y destrezas necesarias para un buen desempeño de nuestra labor como profesores de matemáticas.

En tal sentido intentaremos presentar, con la ayuda de diversos autores -unos dedicados a la reflexión sobre la didáctica de la matemática y otros al trabajo sobre aspectos generales relacionados con la metodología de la enseñanza y pedagogía-, algunos aspectos propios de la enseñanza de la matemática, sin olvidar la importancia del aprendizaje, lo cual ha sido tratado ampliamente en otro trabajo sobre el tema: *Fundamentos sobre educación matemática* (Mora, 2003d). Aquí nos dedicaremos, especialmente, a desarrollar algunas concepciones predominantes sobre la enseñanza de las matemáticas, principalmente Modelos y Medios básicos para el tratamiento de la matemática escolar y Competencias primordiales que deben tener los docentes[2] de matemática según las últimas investigaciones desarrolladas en este campo (Mora, 2003d; Leuders, 2001; Fraedrich, 2001). En Nicaragua, Venezuela, Bolivia y Alemania hemos podido constatar efectivamente que durante el desarrollo de las clases de matemática prevalece el modelo A sobre el modelo B (Mora, 1998; 2003i) tal como se muestra en la Figura 1. En el presente trabajo consideramos que es necesario establecer un tercer modelo que va ajustado tanto a los principios didácticos y pedagógicos críticos como a las visiones sobre la matemática realista y la teoría de la cognición crítica.

Figura 1. Dos modelos didácticos observados en clases de matemática



2. La complejidad de la enseñanza de las matemáticas

Desde hace muchos años se ha considerado que la matemática impartida en las instituciones escolares debe constituirse parte de la formación integral del ser humano, la cual tiene que estar presente de manera permanente desde muy temprana edad, independientemente del grado de escolaridad y de las actividades durante la existencia. Todas las personas, y aquí parece ser que existe un acuerdo tácito en gran parte de la población de las diferentes culturas (Bishop, 1988, pueden y deben apropiarse del conocimiento matemático, así como pensar con mayor frecuencia matemáticamente sobre todo en situaciones de la vida cotidiana. Esta facultad puede ser aprendida, no solamente en contacto con la matemática escolar, sino, especialmente en relación con experiencias matemáticas interesantes y significativas. Éstas serán posibles solamente si se desarrollan actividades de aprendizaje acordes con las necesidades, intereses, facultades y motivaciones de los participantes. Cada unidad de enseñanza tiene que ser preparada de tal manera que tome en consideración, además de los conocimientos matemáticos especiales propuestos según la edad y la formación matemática, la importancia y la utilidad de esos conocimientos matemáticos. Igualmente, la complejidad de la enseñanza de la matemática requiere necesariamente la formación didáctica y metodológica de los docentes de acuerdo con las propuestas pedagógicas desarrolladas durante los últimos años (Arnold y Pätzold, 2002). En tal sentido, la enseñanza de las matemáticas tiene que tomar en cuenta, entre muchos otros, los siguientes tres grandes aspectos.

2.1. El significado de la enseñanza de la matemática

La escuela normalmente otorga a los estudiantes la responsabilidad de su aprendizaje y la aplicación de una determinada disciplina. Actualmente sabemos que el aprendizaje no es un asunto exclusivo de quien aprende, sino también de quien tiene la tarea de enseñar, en la mayoría de los casos los docentes. A los estudiantes se les ha asignado el papel y la responsabilidad de aprender, lo cual predisponía a que se le prestara, en el pasado reciente, muy poca importancia al aprendizaje frente a las ideas generales sobre la enseñanza ampliamente tratadas en la literatura relacionada con la pedagogía y la didáctica. Consideramos que los estudiantes pueden aprender de manera independiente solamente si entran en contacto directo y activo con el objeto que desean aprender, en nuestro caso con el objeto intra y extramatemático, de esta manera podrían asumir cierta responsabilidad por su aprendizaje, puesto que el mismo no es un hecho desligado de los métodos de enseñanza. Consideramos, en tal sentido, que aún debemos profundizar sobre algunos aspectos fundamentales relacionados con la enseñanza de las matemáticas, lo cual influirá considerablemente en el proceso de aprendizaje[3]. Ambos aspectos de la educación matemática se relacionan mutuamente. Igualmente, ellos están estrechamente ligados con el concepto de evaluación escolar, lo cual trataremos con mayor detalle en otra oportunidad, puesto que percibimos la necesidad de hacer algunas reflexiones y precisiones teóricas y prácticas en relación con las características y tendencias actuales de la educación matemática.

Entre las personas que aprenden y las que enseñan se desarrolla una relación dialéctica (Freire, 1973) lo cual permite que durante el aprendizaje y la enseñanza se ponga de manifiesto una bidireccionalidad, permitiendo de esta manera que el proceso sea mutuo y compartido. Existe, en consecuencia, un acuerdo implícito entre los miembros que participan en la práctica concreta de aprendizaje y enseñanza. Algunos denominan, actualmente, a este acuerdo "contrato didáctico". El acuerdo pedagógico y didáctico ha sido planteado por grandes filósofos y pedagogos como Rousseau (1968), Pestalozzi (1803), Simón Rodríguez (1975), Dewey (1998) y Freire (1996). El contrato didáctico normalmente no es tan tácito como muchos creen, donde la responsabilidad por el aprendizaje por parte de los estudiantes está garantizada; por el contrario, se ha impuesto, en prácticamente todos los sistemas educativos, una cultura explicita de contrato didáctico manifestada a través de la evaluación de los aprendizajes (Mora, 2003e). La evaluación de los aprendizajes ha logrado que los estudiantes desarrollen durante el proceso de enseñanza, por otra parte, un tipo de responsabilidad artificial, ajena a los principios y objetivos de la educación y de la educación matemática en particular. Se ha perdido considerablemente el interés por aprender matemáticas en forma independiente; es decir, la responsabilidad por aprender matemática y en muchos casos, por el aprendizaje en general, tiende a disminuir considerablemente.

Tanto los estudiantes como los docentes influyen determinantemente en el éxito del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Ambos son responsables por el desarrollo y los resultados de la práctica didáctica. Ambos tienen que aceptar sus ventajas y debilidades; ambos tienen que respetarse en sus formas de trabajar, aprender y enseñar. La responsabilidad por su propio

aprendizaje y la enseñanza libre no significa la presencia y aceptación del desorden didáctico; por el contrario, requiere mayor atención por parte de estudiantes y docentes. La didáctica crítica y progresista exige mayor acción en el proceso y mejor significado en el contenido, muy especialmente en el contenido matemático. Las dificultades con el aprendizaje de la matemática están ampliamente relacionadas con la poca acción que tienen los estudiantes durante la realización de las actividades matemáticas. Estamos en presencia, entonces, de un problema didáctico, el cual puede ser resuelto mediante una concepción progresista de la pedagogía, tal como lo señaló claramente Paulo Freire (1973 y 1996).

Debido a la estructuración de nuestro sistema didáctico los docentes están poco tiempo con sus estudiantes. Esto hace que durante gran parte del tiempo requerido para el logro de los objetivos previstos en los planes de estudio no esté presente el docente especialista. La tarea de los docentes en consecuencia consiste, además del tratamiento didáctico de ciertos contenidos matemáticos, en desarrollar métodos para un aprendizaje independiente, basado en la investigación y la reflexión fuera de las aulas de clase. El desarrollo de métodos para un aprendizaje independiente le permitirá a los estudiantes recuperar tiempo perdido o sencillamente mejorar y ampliar contenidos matemáticos que hayan sido trabajados superficialmente en clases o grados anteriores. Temas como fracciones, donde los estudiantes normalmente tienen problemas permanentes, pueden ser trabajados de manera autodidacta con la ayuda de métodos y estrategias de aprendizaje adecuadamente trabajados por los docentes durante el poco tiempo en el cual se desarrolla el proceso de aprendizaje y enseñanza. En muchos casos los estudiantes dominan un área de las matemáticas más que otro, tal como puede ocurrir con la geometría, el álgebra, la probabilidad o la estadística. Las estrategias de aprendizaje independientes adquiridas en la escuela pueden contribuir considerablemente con la superación de las dificultades aún existentes después de las respectivas evaluaciones ordinarias.

Aprender y enseñar matemáticas significa desarrollar, casi siempre, conocimientos matemáticos, aunque ellos se hayan creado o inventado hace más de cuatro mil años (Wussing, 1998). Los docentes de matemáticas hacen matemática con sus estudiantes en el momento mismo de construir definiciones y conceptos matemáticos, así sean muy elementales. Aquí encontramos buena parte de la fascinación y el mito de las matemáticas. Ellas pueden ser cada vez reinventadas. Los estudiantes, más que aprenderse de memoria fórmulas o demostraciones, están interesados y motivados por la construcción de esas fórmulas y la demostración de proposiciones o teoremas, preferiblemente si éstos son significativamente importantes para ellos. El temor de los docentes por la elaboración de los conocimientos matemáticos ha permitido actualmente que se valore más el trabajo algorítmico que la construcción de los conceptos matemáticos. Debemos abandonar la idea de que los conceptos matemáticos duraderos son aquellos que se aprenden de memoria; por el contrario, el ser humano recuerda con mayor frecuencia y facilidad las ideas que él ha elaborado por sus propios medios y recursos. Las ideas fundamentales son las que constituyen el centro del aprendizaje matemático significativo (Bruner 1980; Mora, 2003d). Estas ideas pueden ser construidas por los estudiantes con la ayuda de métodos y la presencia permanente de los docentes.

Podríamos afirmar que el aprendizaje de las matemáticas solamente tiene lugar, fuera o dentro de las instituciones escolares, si los estudiantes participan realmente en el desarrollo de los conceptos y las ideas matemáticas. Las matemáticas se aprenden, al igual que otras áreas del conocimiento científico, según los planteamientos psicopedagógicos de Lev Vygotsky (1978), en cooperación con los otros sujetos que intervienen en el proceso de aprendizaje y enseñanza (Röhr, 1997)[4]. Normalmente la enseñanza de las matemáticas se inicia con una breve introducción motivadora, la cual posibilita el interés y la actuación de los estudiantes, según sus conocimientos previos, intuición personal y métodos de aprendizaje conocidos por ellos como resultado de su proceso de socialización intra y extramatemática (Mora, 2002). Los docentes pueden disponer, en la actualidad, de muchos recursos, ideas y medios para iniciar actividades matemáticas con sus estudiantes.

Podríamos señalar, por ejemplo, la presentación de la Whipala[5] y muchos animales como las mariposas o los murciélagos para iniciar el tema sobre simetría; descubrir la ley que explica el comportamiento de una determinada sucesión de números; la elaboración de un problema matemático a partir de la descripción de una situación real compleja, tal como lo proponen, por ejemplo, Skovsmose (1994) o Blum (1985); lectura de una historia o un texto relacionado con alguna temática que contenga ideas y conceptos matemáticos, lo cual podría generar preguntas por parte de los estudiantes y, a partir de las respectivas discusiones, generar entonces las actividades de aprendizaje y enseñanza; se puede iniciar el trabajo matemático introduciendo problemas y situaciones propuestas en los libros de texto; discutir ejemplos resueltos en ellos u otros medios de

aprendizaje y enseñanza con la finalidad de empezar nuevos contenidos matemáticos; etc. Tal como lo hemos expuesto en otras oportunidades, es recomendable desarrollar tareas auténticas y problemas realistas, ya que las situaciones ficticias, también en matemática, producen cierta aversión y rechazo por parte de los estudiantes.

La preparación de las unidades de enseñanza en el campo de las matemáticas exige adecuados conocimientos didácticos y especiales de las disciplinas que podrían intervenir en los problemas y situaciones intra o extramatemáticas. La solución de tales problemas debe estar comprendida siempre en el marco de los correspondientes conocimientos matemáticos, lo cual facilita considerablemente el aprendizaje, sin provocar frustraciones o rechazos didácticos. Esto no significa que no podamos recurrir a soluciones generales y modelos previamente establecidos, lo cual facilita la solución de los problemas generados por la temática correspondiente. Hay que tomar en cuenta además que cada situación nueva lleva a soluciones obviamente inesperadas o desconocidas. Es tarea del docente prever, en cierta forma, los acontecimientos didácticos que puedan presentarse durante el desarrollo de las actividades de aprendizaje y enseñanza. En tal sentido, los docentes requieren no solamente preparación y conocimientos disciplinarios, didácticos y pedagógicos, sino fundamentalmente suficiente tiempo y recursos didácticos. Esta es una de las grandes dificultades por las cuales atraviesan nuestros sistemas educativos. No es suficiente una buena formación profesional si los docentes carecen de medios adecuados, espacios y tiempo para la preparación y desarrollo adecuado de las respectivas actividades de enseñanza, especialmente dentro del marco de los conceptos e innovaciones didácticas fomentadas en la actualidad. De esta manera los docentes no podrán obviamente realizar un buen trabajo didáctico y pedagógico tal como lo proponen, cada vez más, tanto los diseñadores del currículo como los pedagogos y didactas. Una buena enseñanza de las matemáticas exige una alta responsabilidad por parte de los estudiantes, pero también buenas condiciones ambientales y didácticas en las respectivas instituciones escolares. El aprendizaje de las matemáticas necesita paciencia, tiempo y recursos.

Según algunos estudios relacionados con las interacciones sociomatemáticas y la realidad de la práctica matemática en las aulas, también en los países industrializados ésta es dominada por la presencia de libros de texto (Bauersfeld, Krummheuer y Voigt, 1988; Voigt, 1995; Krummheuer, 1997; Mora, 1998), cuya concepción didáctica no se ajusta a los principios pedagógicos y didácticos orientados hacia el trabajo activo y colectivo de los estudiantes. Los libros de texto, en la mayoría de las materias y desde el primer ciclo de primaria hasta el bachillerato, están concebidos dentro de una estructura rígida, sistemática y frontal de la educación matemática.

Hacer matemáticas en las instituciones escolares, más que repetir matemáticas ya hechas y descontextualizadas, significa conseguir un contacto estrecho entre quienes participan en el trabajo didáctico y la actividad matemática. Esta relación solamente es posible si las situaciones didácticas trabajadas, dentro o fuera de las matemáticas, tienen que ver con actividades significativamente importantes para las(os) niñas(os) y las(os) jóvenes. Esto no quiere decir, desde el punto de vista metodológico, que los docentes tienen que esforzarse por presentar adornadamente las matemáticas existentes en los libros de texto. La calidad de las matemáticas escolares tiene que ver, fundamentalmente, con el tipo de situaciones internas o externas a las matemáticas (Mora, 2003e). Esta exigencia didáctica requiere de una adecuada y pertinente preparación de las unidades de aprendizaje y enseñanza, las cuales podrían surgir de la reflexión en colectivo de los docentes de matemáticas y otras áreas dentro de las respectivas instituciones escolares. Para ello es indispensable la actualización permanente de los docentes de matemáticas y las demás asignaturas en los diferentes niveles del sistema educativo. Para lograr tales objetivos se necesita también la participación activa de los padres, la sociedad en su conjunto y una nueva actitud hacia el aprendizaje por parte de los estudiantes (Medina, Mora y Riobueno, 2003).

El proceso de aprendizaje y enseñanza en las instituciones escolares debe tomar en consideración las*diferencias* de los sujetos que participan en él (Mora, 2003f). La enseñanza está dirigida hacia un grupo que aprende de manera compartida y mediante la interacción social. Cada uno de los miembros de ese grupo posee importantes diferencias individuales, producto de sus propias experiencias; tales diferencias se ponen de manifiesto a través de diversas inclinaciones e inclusive habilidades o destrezas en el dominio de una determinada disciplina o temática en particular. Para poder atender adecuadamente, durante el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza, las diferencias de cada participante y las propias fuerzas que actúan en el grupo se requiere por parte de los docentes una amplia flexibilidad didáctica, especialmente en el campo de las matemáticas. Los docentes en general,

y los de matemática en particular, tenemos que aceptar definitivamente que a nuestras aulas asisten estudiantes muy diferentes entre sí, quienes igualmente deben ser atendidos con cariño y flexibilidad.

En la actualidad sabemos, gracias a los diferentes estudios que se han realizado en el campo de la educación matemática, que efectivamente muchas(os) niñas(os) y jóvenes presentan dificultades, en algunos casos muy marcadas, con las matemáticas, independientemente de la importancia atribuida tanto para la formación integral de los sujetos como para la sociedad en su conjunto. Éstas, sin embargo, pueden atenderse desarrollando un trabajo didáctico en las aulas de clase con la ayuda de métodos de aprendizaje y enseñanza colectivos e individualizados, siempre ajustados a las diferencias particulares y a las características del grupo. Hay que señalar, por otro lado, que no solamente necesitan ayuda aquellos estudiantes que presentan mayores dificultades. También hay que tomar en cuenta a quienes poseen un alto interés por las matemáticas. Ellos necesitan también un tratamiento particular, el cual podría consistir en motivarlos para que resuelvan situaciones problemáticas con un mayor grado de complejidad (Krippner, 1992).

La flexibilidad en la enseñanza de las matemáticas no solamente debe limitarse a estos dos casos en particular; también es importante tomar en cuenta las interrogantes y el desarrollo de sus trabajos, independientemente que sus soluciones sean correctas o parcialmente correctas. El elogio y reconocimiento por las iniciativas y estrategias de solución creativas de los estudiantes, forma parte también de una flexibilización didáctica.

Durante el desarrollo del trabajo en el aula, tanto el aprendizaje como la enseñanza tienen que encontrar un balance adecuado. Por una parte, la enseñanza tiene que ajustarse a las características de aprendizaje de los alumnos e, igualmente, el aprendizaje del grupo y de cada estudiante en particular tendrá que ajustarse a los métodos de enseñanza aplicados por los docentes. Sólo mediante el logro de esta armonización es posible vincular adecuadamente el aprendizaje a la enseñaza y viceversa, evitando de esta manera la descoordinación entre ambos procesos.

2.2. Etapas básicas del proceso de enseñanza

Diferentes estudios relacionados con las interacciones sociomatemáticas en el aula (Yackel y Cobb, 1996; Mora, 1998), aplicando la observación como método básico de investigación, han mostrado que las clases de matemática, en diferentes países, se pueden caracterizar por la existencia de siete fases claramente diferenciadas. En algunos casos unas de ellas tienen mayor peso o relevancia en la enseñanza que en otros. Todas están vinculadas con la visión que tienen los docentes de esta disciplina sobre la didáctica de las matemáticas y la práctica concreta de aula. A continuación describiremos brevemente cada uno de estos momentos didácticos reportados en muchos estudios internacionales sobre el desarrollo de las clases de matemática. Además de hacer mención y describir algunos de los elementos que caracterizan a estas siete fases, trataremos de incorporar algunas ideas que podrían contribuir con la realización de una enseñanza matemática útil y significativamente importante para todos los estudiantes. Hemos tomado en consideración, para el presente análisis, el esquema que muestra los dos modelos más comunes aplicados en las clases de matemáticas, reportados por diferentes estudios como el TIMSS (*Third International Science and Mathematics Study*), PISA (*Programme for International Student Assessment*), PIRLS (*Progress in International Reading Literacy Study*) y LLECE (*Laboratorio Latinoamericano para la Evaluación de la Calidad de la Educación*) durantes los últimos diez años.

2.2.1. Introducción didáctica

Esta fase se refiere, además del ritual inicial de toda hora de clases de matemáticas u otra área, a la mención breve de la temática que se trabajará durante el tiempo que dure la unidad de enseñanza. Hay diferentes formas de iniciar este proceso. En algunos casos se describen cortamente los contenidos que serán tratados, en otros se recuerda el tema trabajado en las clases anteriores o sencillamente se plantea a los estudiantes algunas preguntas preliminares con la finalidad de empezar la discusión y la reflexión alrededor de un determinado problema matemático o extramatemático. En otros casos los docentes de matemáticas se ayudan con historias concretas, informaciones de prensa recientes relacionadas con el tema, fenómenos naturales o sociales, situaciones conocidas por los estudiantes, juegos o temas propios de otras asignaturas. La vida cotidiana está llena de fenómenos que pueden servir para introducir diversos temas matemáticos en diferentes grados, desde el primer ciclo hasta el bachillerato e inclusive en las denominadas matemáticas universitarias. Hemos

observado cómo los docentes usan diferentes estrategias de este tipo, tales como medidas de peso, longitud y tiempo.

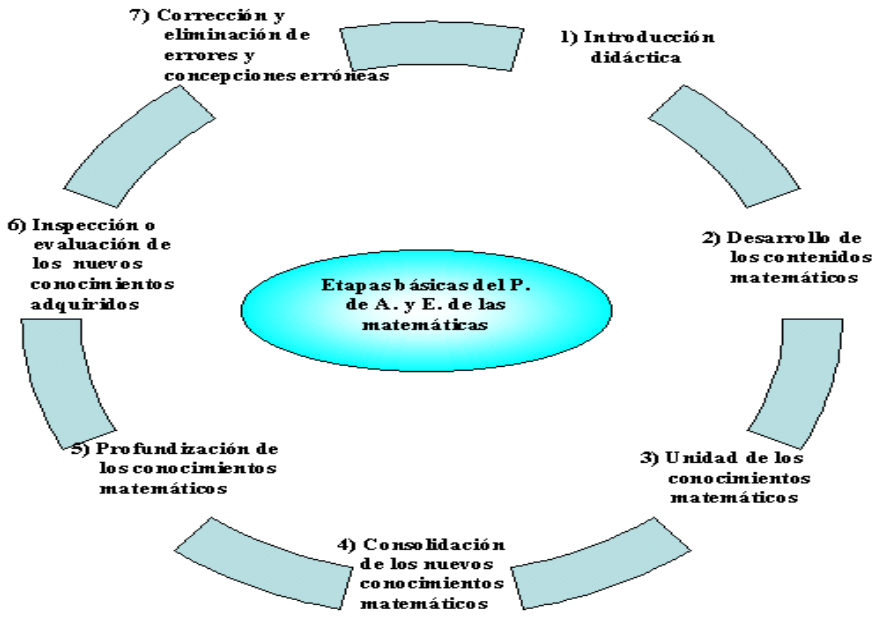


Figura 2. Etapas Básicas del Proceso de Aprendizaje y Enseñanza de la Matemática.

Es importante señalar que el tema de los alimentos aparece con mucha frecuencia como estrategia didáctica, sobre todo cuando se trata de introducir las fracciones. Prácticamente en todos los libros de texto de matemáticas aparece la idea de la torta o la tabla de chocolate, con lo cual se desea familiarizar a los estudiantes con el concepto de repartir y fraccionar. Dentro de las perspectivas didácticas de resolución de problemas, el aprendizaje y la enseñanza por proyectos, las aplicaciones y los juegos, esta tendencia de usar la "realidad ficticia" (Nesher, 2000) solamente para introducir las clases de matemática es altamente cuestionada, aunque no deje de tener importancia la contextualización de algunos contenidos matemáticos como el caso de las fracciones, cuyo dominio permite el desenvolvimiento adecuado de todo ciudadano en el mundo actual. Nos inclinamos, en consecuencia, por una introducción didáctica orientada en y hacia el planteamiento de situaciones y/o problemas intra o extramatemáticos con cierta complejidad didáctica, alrededor de los cuales se desarrollará toda una unidad de enseñanza.

Una introducción didáctica de esta naturaleza le brinda a los estudiantes la posibilidad de vincular el lenguaje natural, la visualización, la manipulación de objetos concretos, la simbolización de hechos y, muy especialmente, el proceso de acción e investigación (Skovsmose, 1994; Stenhouse**,** 1998). Dentro de esta visión de la educación matemática se han observado, en el marco del TIMSS (Mora, 2001), algunos ejemplos muy concretos para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas iniciados mediante el planteamiento de un problema realista, cuya complejidad requiere un tratamiento participativo y activo tanto de los estudiantes como de los docentes.

2.2.2. Desarrollo de los contenidos matemáticos

Normalmente los docentes de matemática asumen el control total de la clase y desarrollan los nuevos contenidos matemáticos mediante el método de preguntas y respuestas (en muchos casos estas respuestas no surgen directamente de los integrantes del curso), sin mucha participación de los estudiantes durante esta fase fundamental del proceso. En otros casos, aunque muy escasos, surgen a partir de las denominadas situaciones problemáticas uno o más problemas, cuyas soluciones son encontradas mediante diferentes estrategias didácticas. Una de ellas, la más común hasta el presente, es la sugerida por los mismos docentes, quienes le brindan muy poco espacio y tiempo a los estudiantes para que reflexionen sobre las posibles soluciones. Durante este proceso de búsqueda de las respectivas soluciones se incorporarán nuevos términos matemáticos, se estimarán algunas posibilidades explicativas y se formularán reglas o proposiciones que podrían solucionar definitiva y adecuadamente los respectivos problemas. Se trabajará, entonces, un conjunto importante de contenidos intra o extramatemáticos que deben ser dominados, según los objetivos de la enseñanza, por todos los alumnos del curso. La meta central de esta fase es, casi siempre, hacer que los estudiantes aprendan nuevos conocimientos o dominen nuevos procedimientos matemáticos. Lamentablemente, en nuestra realidad educativa se logra que los estudiantes asimilen escasamente algunos algoritmos, sin llegar a comprender realmente sus significados y menos aún su construcción, lo cual debe ser una de las responsabilidades de la matemática escolar.

Durante esta fase, algunos docentes dan oportunidad a sus estudiantes para que trabajen cierto tiempo de manera individual, grupal o en parejas, y lleguen a algunas soluciones parciales o definitivas. Estas ideas pueden ser escritas en la pizarra por los docentes o los propios alumnos. Las mismas sirven como punto de partida para el tratamiento de los nuevos contenidos matemáticos. En otros casos se puede hacer uso intensivo de los libros de texto, siempre que éstos tengan un enfoque didáctico progresivo y acorde con las ideas didácticas orientadas hacia los estudiantes.

2.2.3. Vinculación con otros conocimientos matemáticos

Aunque esta fase es poco frecuente en los reportes de los estudios como el TIMSS y el PISA, ella está presente, en muchos casos, de manera implícita durante el desarrollo de las demás fases. Las matemáticas por excelencia constituyen un mundo compuesto por una infinidad de partículas estrechamente conectadas unas a otras, lo cual podría ser representado por un árbol con infinitas ramas. Se ha observado que los docentes tratan, de manera intencional o automática, de conectar diferentes ideas matemáticas, independientemente de su complejidad, cuando están explicando un determinado concepto matemático. Esta idea de la conectividad de los conocimientos matemáticos está asociada con el concepto de ideas fundamentales en educación matemática (Bruner, 1980; Mora, 2003e; Schweiger, 1992). En el marco del concepto de triángulo, por ejemplo, pueden ser trabajadas muchas ideas de la geometría hasta ver, inclusive, los contenidos de geometría y trigonometría de los sólidos u otros conceptos matemáticos de mayor envergadura.

Las perspectivas didácticas basadas en la resolución de problemas, los proyectos y las aplicaciones exigen, con mayor énfasis, la conectividad de los conceptos matemáticos. Ocurre con frecuencia que el tratamiento y resolución de un problema requiere varios contenidos matemáticos, con frecuencia de diferente nivel de complejidad y campos matemáticos (Orton, 1998). La modelación de una situación realista puede necesitar tanto de conceptos de geometría plana como de la elaboración de una ecuación cuadrática. Para los docentes esta actividad es obvia; sin embargo, a los estudiantes les cuesta dominar, en corto tiempo y con pocos ejemplos, esta propiedad de los conceptos matemáticos y de las estrategias didácticas complejas como la resolución de problemas, los proyectos y las aplicaciones. Los docentes de matemática tenemos que hacer explicita, durante el proceso de aprendizaje y enseñanza, esta característica intrínseca de las matemáticas. Por ello hemos considerado pertinente presentar esta fase de manera independiente, ya que los estudiantes deben saber claramente, como parte de los objetivos de la educación matemática, que es necesario e importante conectar diferentes conocimientos matemáticos en la resolución de problemas externos o internos a la matemática.

2.2.4. Consolidación de los nuevos conocimientos matemáticos

La mayor parte de los conceptos matemáticos puede ser aprendida, además del esfuerzo que los docentes hagan en cuanto a las estrategias didácticas, la importancia y el significado de los contenidos

matemáticos y el interés que muestren los estudiantes hacia la asignatura, consolidando mediante la repetición y ejercitación de los procedimientos y reglas trabajados durante las respectivas clases de matemáticas. El aprendizaje de las matemáticas requiere paciencia, ejercitación y repetición permanente. Es probable que otras asignaturas puedan ser dominadas mediante una corta preparación, como la que practican los estudiantes antes de asistir a una evaluación. En matemáticas no es suficiente y parece ser que el gran fracaso que se reporta continuamente con el aprendizaje de las matemáticas se debe precisamente a la poca o casi nula consolidación de los nuevos y viejos conocimientos matemáticos. Es ampliamente conocido que tanto las niñas(os) como los jóvenes y adultos pierden lo aprendido con cierta rapidez si se deja pasar mucho tiempo sin ejercitar, repetir o aplicar tales conocimientos. Con frecuencia señalamos que es muy importante tomar en consideración para el inicio de nuevos contenidos escolares los conocimientos previos que tienen los estudiantes. Resulta, sin embargo, que prácticamente todas las pruebas diagnósticas indican que tales conocimientos previos no son suficientes, de acuerdo con los objetivos que se han pretendido alcanzar como parte de la formación básica de la población estudiantil. La razón de esta deficiencia está precisamente en la poca o escasa consolidación de los contenidos matemáticos trabajados durante el proceso de escolarización.

Muchas veces los docentes o la población en general insisten en decir que la repetición y ejercitación son la clave del aprendizaje. Por esta razón aparecen en los libros de texto grandes cantidades de ejercicios, muchos de ellos repetitivos. Sin embargo, no es suficiente hacer una lista de 500 ejercicios sobre solución de sistemas de ecuaciones, si los estudiantes realmente no entienden el sentido de esos ejercicios y su importancia. La comprensión y la reflexión del trabajo matemático constituyen la clave de la consolidación de los conocimientos. Es preferible trabajar razonada y profundamente 5 ó 6 ejercicios de resolución de una ecuación de segundo grado que resolver 30 ó 40 ecuaciones mecánicamente. La calidad de los problemas y ejercicios de consolidación incide considerablemente en un buen aprendizaje de las matemáticas.

En la práctica cotidiana de la enseñanza de las matemáticas se suele ejercitar intensivamente antes de las evaluaciones; sin embargo, al transcurrir tales evaluaciones se lanzan los conocimientos matemáticos al olvido. No se usan más, ni siquiera como conocimientos previos. Es ampliamente conocida la curva del olvido, ésta se hace más pronunciada cuando no se han consolidado los conocimientos matemáticos o cuando no se vuelven a utilizar en la vida cotidiana. Las matemáticas centradas en lo puramente algorítmico y mecánico dejan de ser interesantes y útiles al cabo de unas cuatro o cinco semanas. En tal sentido, la consolidación de los conocimientos matemáticos está unida a la calidad de los contenidos matemáticos trabajados en la escuela, las estrategias de enseñanza aplicadas y, sobre todo, la relación entre matemática y realidad (Nesher, 2000; Blum, 1985; Mora, 2002).

2.2.5. Profundización de los conocimientos matemáticos

Después de la fase de consolidación se encuentra la de profundización de cada nuevo conocimiento adquirido en la escuela. No solamente los estudiantes con una alta capacidad para las matemáticas u otras asignaturas requieren profundizar en los conocimientos matemáticos trabajados durante cada unidad de enseñanza. Por el contrario, los estudiantes con mayores dificultades necesitan profundizar en algunos aspectos básicos y necesarios, siempre en correspondencia con sus inquietudes e intereses. Hay estudiantes a quienes no siempre les gusta trabajar todos los contenidos matemáticos tratados en las respectivas clases de matemáticas; sin embargo, los docentes tenemos la responsabilidad y la tarea de indagar sobre cuáles podrían ser los estudiantes que necesitan una mayor profundización de algunos contenidos matemáticos. Además, debemos seleccionar aquellos temas matemáticos que pueden interesar a unos u otros estudiantes, lo cual facilitaría la profundización de acuerdo con las diferencias individuales de cada uno de ellos (Krippner, 1992). No sería en algunos casos suficiente, por ejemplo, que los estudiantes comprendan, a través de algunas estrategias concretas de aprendizaje, que 2/5 es menor que 7/4. Habría que profundizar haciendo otro tiempo de argumentaciones, como por ejemplo realizar algunas operaciones aritméticas con ambas fracciones para probar que en efecto una fracción es menor o mayor que la otra (Mora, 2003e). También se pueden convertir ambas fracciones en decimales y verificar claramente las diferencias entre ellas. Se podría profundizar aún más, determinando por ejemplo la existencia de otras fracciones entre 2/5 y 7/4. Esta actividad tendría un nivel de exigencia mucho mayor, tal vez para aquellos estudiantes con mayor interés por las matemáticas.

2.2.6. Inspección de los nuevos conocimientos matemáticos

Todos sabemos que el objetivo básico de la enseñanza es el aprendizaje. ¿Cómo determinar si los estudiantes realmente han alcanzado las metas establecidas en los planes de enseñanza? Esta es una tarea altamente compleja, para la cual la didáctica de las matemáticas aún no tiene una respuesta completamente satisfactoria. Hay algunas ideas e indicaciones (Salinas, 2002; Mosquera y Quintero, 1997; Amigues y Zerbato-Poudou, 1999; Leuders, 2002; Mora, 2003f), las cuales, sin embargo, aún están lejos de una solución definitiva al problema de la evaluación de los aprendizajes matemáticos en los diferentes ámbitos del sistema educativo. La realidad es que actualmente los docentes siguen aplicando como estrategia las evaluaciones cortas, parciales, trimestrales, etc., existiendo inclusive una variedad amplia de tipos de evaluaciones, la mayoría desarrolladas en el aula de manera individual y escrita.

El control o la inspección durante el proceso de aprendizaje y enseñanza suministra, según la tradición de la evaluación de los aprendizajes, información a los docentes sobre la efectividad de la enseñanza. Lamentablemente, en nuestros países latinoaméricanos este control no cumple solamente este objetivo, por el contrario él pretende seleccionar y diferenciar a los estudiantes de acuerdo con las condiciones y las exigencias de los respectivos sistemas educativos.

Es muy importante tener presente que el éxito de la enseñanza y del aprendizaje depende no de las características de la evaluación en sí misma, sino más aún del trabajo didáctico y pedagógico que se realice en las aulas de clase. Mientras mayor acción, exigencias motivadoras y buenas estrategias didácticas existan durante el proceso de aprendizaje y enseñanza, mejores serán los resultados obtenidos mediante la inspección de los conocimientos matemáticos de los estudiantes. En este caso el control cumpliría su verdadera función, la de contribuir con el aprendizaje y la enseñanza. La inspección de los aprendizajes matemáticos es la vía adecuada para retroalimentar el proceso y no el método indicado para aprobar, reprobar, seleccionar, otorgar títulos o plazas en las instituciones de educación superior. Los últimos estudios internacionales, como el TIMSS, PISA y PIRLS muestran claramente la importancia del control de los conocimientos matemáticos como estrategia para el mejoramiento de la enseñanza e impulso de unas concepciones metodológicas en los diferentes niveles de los sistemas educativos. Este debe ser el objetivo primordial del control de los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza; de esta manera el control se convierte en un aspecto más, muy importante por cierto, de la didáctica.

La inspección de los conocimientos matemáticos adquiridos por los estudiantes se puede lograr a través de peguntas hechas antes, durante y después del desarrollo de la enseñanza. La evaluación de las respuestas suministradas por los estudiantes otorga inmediatamente información precisa sobre el logro de los aprendizajes. La verificación del proceso y los resultados de actividades complejas de enseñanza permite enfocar de otra manera la ayuda o las sugerencias para la continuación del trabajo individual o colectivo. También podemos inspeccionar los aprendizajes mediante la observación independiente del trabajo grupal de los estudiantes. Los docentes pueden determinar, además, el logro de los aprendizajes mediante tareas de investigación, exposiciones, discusiones colectivas, etc., disminuyendo de esta manera la presentación de pruebas escritas, cuya concepción por parte de los docentes, elaboración por parte de los estudiantes y corrección requiere mucho tiempo y esfuerzos, lo cual no siempre refleja un mejor y mayor logro de los aprendizajes matemáticos.

2.2.7. Corrección, eliminación de errores y concepciones erróneas

Lamentablemente la concepción de una enseñanza matemática centrada en el formalismo matemático ha disminuido la construcción del conocimiento matemático y, en consecuencia, ha eliminado prácticamente el error como un elemento básico del aprendizaje de las matemáticas escolares. La tradición didáctica insiste en que los estudiantes deben responder siempre de manera correcta tanto a las preguntas orales realizadas por los docentes durante el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en el aula como en las evaluaciones escritas presentadas por éstos. El error y las concepciones erróneas previas de los estudiantes no son aprovechados como punto de partida para una buena enseñanza; más bien, por el contrario, se penalizan fuertemente generando frustración, rechazo e impotencia en los estudiantes. Es ampliamente conocido (Radatz**,**1980) que todos los seres humanos cometemos diaria y continuamente muchos errores, pero, por otra parte, también hemos construido una cultura de penalización de los errores. Tal vez esta actitud esté relacionada con la necesidad de justicia que necesitan los seres humanos; sólo que el error desde el punto de vista didáctico no tiene la misma connotación que desde el punto de vista judicial o jurídico.

Los errores en matemática, aparentemente, son cometidos solamente por los estudiantes y no por los docentes o matemáticos profesionales. Esta equivocada percepción en cuanto a quién comete errores o no durante el quehacer matemático ha contribuido con la mistificación del aprendizaje matemático. Saber matemáticas, se dice con frecuencia, es resolver los problemas o ejercicios matemáticos de manera independiente sin compartir con otros y cometer errores. Esta posición extrema asumida cotidianamente por muchos matemáticos y educadores matemáticos limita considerablemente el aprendizaje y provoca en los estudiantes un amplio rechazo hacia esta disciplina.

Diferentes conversaciones con adultos, quienes ejercen profesiones diversas y muchas de ellas relacionadas con las matemáticas, reportadas por algunos estudios sobre la actitud hacia las matemáticas (Heymann, 1996), muestran claramente cómo ellos en su formación matemática en las instituciones escolares sufrieron porque sus maestras(os) o profesoras(es) les rechazaron o penalizaron los errores cometidos en la realización de sus tareas. Esta actitud antipedagógica debe cambiar, si deseamos realmente que la población, en cualquier nivel del sistema educativo, aprecie y disfrute de las matemáticas. Stella Baruck (1989) ha señalado en su gran obra*Qué edad tiene el capitán* la necesidad de reorientar la opinión que tienen los docentes en cuanto a los errores que cometen los estudiantes y las concepciones erróneas previas que ellos poseen antes de iniciar el aprendizaje de un determinado tema de matemáticas. Ella señala, por ejemplo, que los errores obviamente forman parte del trabajo matemático y que por consiguiente deben tomarse en cuenta en el desarrollo del proceso de enseñanza, ya que ayudan enormemente al éxito de los aprendizajes matemáticos. Los errores en matemática constituyen, en cierta forma, parte del motor que empuja a quien aprende matemáticas hacia la indagación de las razones que explican muchos conceptos matemáticos. Los docentes, por el contrario, deben brindarle a los estudiantes suficientes elementos de autocrítica constructiva con la finalidad de que se apoyen en sus propios errores para mejorar su aprendizaje matemático.

Finalmente debemos destacar que las concepciones erróneas de todas las personas que puedan vincularse con el mundo de las matemáticas forman parte de una facultad propia de los seres humanos que les posibilita aprender con mayor éxito. Se trata de la intuición. Como bien lo decía Paulo Freire (1973) la respuesta intransitiva que dan los seres humanos a sus múltiples interrogantes, forma parte de su capacidad intuitiva para buscar soluciones a los problemas, muchos de ellos ampliamente complejos. Como parte de esas respuestas y por falta de las explicaciones "racionalmente correctas" los seres humanos desarrollan explicaciones no siempre ajustadas a los conocimientos establecidos por las ciencias en cada caso particular. Los niños(as) en particular elaboran constantemente este tipo de constructos mentales, los cuales se convierten a lo largo del tiempo en concepciones erróneas. Éstas son muy frecuentes en matemática y, al igual que los errores, son penalizadas por muchos docentes de matemática. La idea es entonces aprovecharlas como punto de partida para desarrollar estrategias de aprendizaje y enseñanza que contribuyan con su transformación en concepciones matemáticas válidas y ciertas.

2.3. La enseñanza de métodos y contenidos matemáticos específicos

Con la educación matemática en las instituciones escolares no solamente se deben aprender contenidos matemáticos específicos en un determinado grado. Uno de sus objetivos es lograr que los estudiantes construyan, además, métodos para resolver tanto problemas intra y extramatemáticos como situaciones complejas propias de la vida cotidiana. A veces, los docentes nos olvidamos de que lo que realmente permanece en la memoria de los seres humanos durante largo tiempo son las estrategias y los métodos que se han elaborado durante el tiempo de escolaridad. Si existe alguna asignatura que ayuda realmente a la estructuración y construcción de métodos en las personas es precisamente la matemática y, más aún, las estrategias didácticas puestas en práctica, como la resolución de problemas, la enseñanza por proyectos y las aplicaciones.

Durante el mismo desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza los docentes de matemáticas y otras áreas ponen en práctica constantemente diferentes métodos y estrategias, lo cual debería hacerse también explícito como parte de los objetivos del aprendizaje y la enseñanza. En tal sentido, desarrollaremos a continuación algunos puntos relacionados con la enseñanza de contenidos y métodos en la educación matemática escolar.

2.3.1. Dominio de la terminología matemática

Las matemáticas, a diferencia de otras asignaturas, se fundamentan básicamente en conceptos, términos y definiciones. Los términos matemáticos constituyen realmente su esencia (Kline, 1985). Sin ellos tanto la sistematicidad y las estructuras como el significado del contenido matemático tendrían muy poco sentido. Los términos matemáticos pueden ser ordenados jerárquicamente y cada uno de ellos está caracterizado por un contenido que lo identifica y lo diferencia de los demás. Muchos de los términos con los cuales trabajan los matemáticos son producto de representaciones de las realidades mismas o usadas con propiedad en el lenguaje común de la población. El término "límite", por ejemplo, es usado con frecuencia en la lengua materna y, al mismo tiempo, sirve para denotar un concepto muy importante en todo el edificio matemático. Igualmente el término "derivada" está estrechamente relacionado, desde el punto de vista de su significado, con el verbo "derivar", el cual se usa también en diferentes lenguas. Sin embargo, no siempre se habla en el lenguaje cotidiano en términos matemáticos y cuando los usamos queremos expresar otras ideas y no necesariamente conceptos o mensajes matemáticos. No es que los términos adquieran significados diferentes, sino que el significado matemático que los caracteriza está claramente definido y restringido a un contenido o idea matemática. Estamos en presencia entonces del uso de un mismo término en dos formas diferentes del lenguaje; por una parte, el lenguaje coloquial y por otra en un tipo de lenguaje especializado. Los docentes tienen la tarea de establecer y aclarar, durante el desarrollo de las clases de matemáticas, estas diferencias. Sería muy beneficioso para la educación matemática que la población usara con mayor frecuencia muchos términos con la misma connotación que se usa en matemáticas.

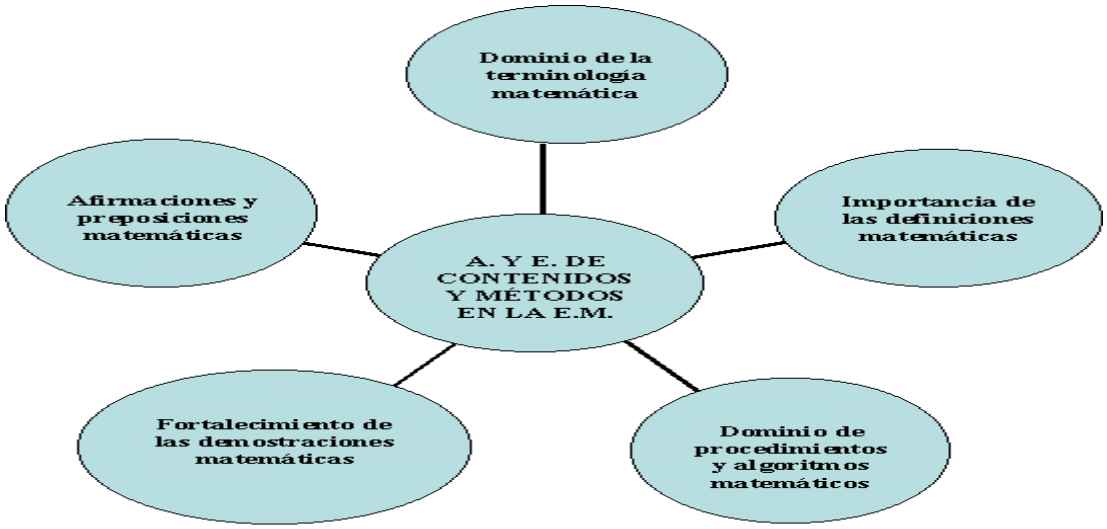


Figura 3. Aprendizaje y Enseñanza de Contenidos y Métodos en la Educación Matemática

El dominio y manejo cotidiano de los términos matemáticos ayuda considerablemente a la comprensión de los conceptos matemáticos. Hay diferentes maneras de asociar un término matemático con símbolos, los cuales se constituyen en sinónimos de esos términos. Así por ejemplo, la palabra cuadrado es un término usado cotidianamente, en el sentido matemático en la mayoría de los casos, para denotar cosas que tienen la característica de un cuadrado. Una mesa cuadrada, un papel cuadrado, un cuadro cuadrado, etc., se convierten en sinónimos simbólicos de la palabra cuadrado. No ocurre lo mismo, sin embargo, con el término rectangular, aunque pudiese existir en la vida cotidiana mayor cantidad de rectángulos que cuadrados.

Un segundo aspecto importante que se debe tomar en cuenta cuando nos referimos a los términos matemáticos es la idea de conjunto que la mayoría de ellos denota. Así por ejemplo las palabras triángulo, números negativos, racionales, función, etc. comprenden conjuntos de elementos que poseen características similares. Igualmente la mayoría de los términos matemáticos, además de su orden estructural y jerárquico, están relacionados unos con otros, obedeciendo a ciertas leyes de orden, similares a los principios de orden que mantienen a las diferentes lenguas en un sistema compacto. Los docentes tienen que hacerle ver a los estudiantes la importancia de los términos matemáticos, su adecuado uso y el dominio de sus respectivos significados. Si este objetivo es

alcanzado mediante las clases de matemática, seguramente hemos abonado la tierra para seguir trabajando matemáticamente con nuestros estudiantes.

2.3.2. Importancia de las definiciones

Las definiciones matemáticas normalmente son presentadas por los docentes al inicio del tratamiento de un determinado tema matemático. Este apresuramiento está vinculado con la visión que se tiene del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Se considera, tal vez erróneamente, que después de señalar la temática a ser trabajada durante la unidad de enseñanza hay que pasar inmediatamente a dictar o copiar en la pizarra las definiciones que se utilizarán en el desarrollo de dicha unidad. Esta filosofía de la enseñanza de las matemáticas es muy formal y contradice los principios de una didáctica orientada en la acción y la construcción de los conocimientos matemáticos. Los matemáticos profesionales aplican esta metodología solamente para escribir sus notas, artículos para ser publicados en revistas especializadas o sencillamente para el desarrollo de una clase magistral de matemáticas en alguna facultad de ciencias puras.

Desde el punto de vista didáctico los docentes de matemáticas debemos enfocar la enseñanza de tal manera que los estudiantes participen en la elaboración de las definiciones. Esta tarea no es sencilla y requiere tiempo, trabajo y paciencia. La idea es que las definiciones formen parte de los resultados de un proceso de matematización. Las definiciones, entonces, serán trabajadas por los integrantes de la clase mediante la reflexión y la discusión colectiva. De esta manera los estudiantes aprenden, no solamente las definiciones de manera apropiada, sino que además aprenden cómo se acostumbra a definir los conceptos. Esto significa que ellos, con la ayuda de la elaboración de los conceptos matemáticos, también aprenden métodos para la elaboración de definiciones, ya que éstas no son el resultado de la espontaneidad de los científicos, filósofos o escritores, sino que resultan del trabajo creador realizado por las personas sobre una temática en particular.

Las definiciones no son absolutas y tampoco propiedad de algunas personas o de los libros de texto. Ellas surgen a partir de un largo camino de reflexión sobre los objetos y los hechos que caracterizan a los fenómenos, sean éstos sociales o naturales, tal como lo señalaba Hans Freudenthal (1983) en su libro *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Cada día, en las clases de matemáticas, ciencias naturales u otras áreas del conocimiento científico, estamos trabajando con definiciones. Éstas, según el deseo de las(os) maestras(os) o profesoras(es), deberían ser escritas por los estudiantes con sus propias palabras. No es suficiente que ello ocurra, lo importante radica en la asimilación de las definiciones a través de su construcción mediante el trabajo cooperativo (Röhr, 1997).

2.3.3. Las afirmaciones y las proposiciones matemáticas

Los términos y las definiciones matemáticas están directamente relacionados con las afirmaciones y proposiciones matemáticas, las cuales se manifiestan en reglas o teoremas, cuya veracidad debe ser demostrada. Normalmente tratan de propiedades o relaciones entre términos matemáticos, para lo cual las definiciones permiten la conectividad y sistematización de esas propiedades. Las afirmaciones y proposiciones matemáticas, al igual que la resolución de problemas, constituyen realmente la esencia de esta disciplina.

Tal como ocurre con las definiciones matemáticas, también en nuestra cultura didáctica las reglas y los teoremas son presentados, siguiendo el esquema lineal de enseñanza expuesto en la figura 1, de manera directa sin reflexión y construcción. Sin embargo, los docentes de matemática sabemos que para la creación de un teorema o una proposición matemática se requiere un largo proceso de indagación, reflexión y discusión. Para los estudiantes se escriben en la pizarra reglas y teoremas matemáticos sin pasearse por la historia y el contexto donde fueron elaborados. Tampoco se discute su importancia intra y extramatemática, menos aún la esencia de sus significados. Éstos son presentados por los docentes de matemática como si fueran unas afirmaciones impuestas por los dioses, cuya única salida es aceptarlas y quien no esté de acuerdo con ellas, debe entonces demostrarlas.

Por el contrario, si la enseñanza de la matemática está orientada hacia la construcción de los conocimientos matemáticos a través del trabajo activo y la discusión colectiva, entonces las reglas o los teoremas pueden ser elaborados mediante un proceso de indagación, estimación, sospechas,

pruebas de casos particulares, etc. Este procedimiento puede llevar a los estudiantes a perfilar algunas caracterizaciones o a ver algunas regularidades, lo cual podría motivar la demostración algo más formal de tales afirmaciones matemáticas. Sin embargo, los estudiantes ya se han acostumbrado, desde los primeros años de escolaridad, a la aceptación pasiva de las afirmaciones matemáticas. Para ellos, y también para muchos docentes, todo aquello referido a las matemáticas es incuestionable, por lo tanto no hace falta demostrar las proposiciones y los teoremas, es suficiente asumirlos como verdaderos. Como consecuencia de esta didáctica impositiva, tenemos que los docentes solamente demuestran o prueban aquellas reglas o teoremas cuando algún estudiante lo requiere o muestra insatisfacción por la respectiva afirmación. Hay quienes consideran, con cierta razón, que la demostración objetiva de los hechos, sobre todo en el campo de las matemáticas y las ciencias naturales, constituye una columna importante de la formación crítica de los sujetos que se encuentran en proceso de socialización. Es realmente la oportunidad para introducir a las(os) niñas(os) y los jóvenes en el mundo del pensamiento científico.

Las reglas matemáticas (y los teoremas) pueden resultar más interesantes para los estudiantes si éstos perciben las razones y los argumentos que garantizan la veracidad de tales afirmaciones. Se considera que los niños, inclusive muy pequeños, preguntan con frecuencia el porqué de ciertos comportamientos de algunos objetos y cómo surgen algunas afirmaciones matemáticas, aunque éstas sean muy elementales. La manera de impulsar esta actitud positiva de los estudiantes es construir y/o demostrar tales reglas o teoremas. Sabemos que es un camino largo y, muchas veces, complejo, pero también estamos convencidos del gran valor didáctico, pedagógico y científico que ello representa.

2.3.4. La inquietud por las demostraciones en matemáticas

Aunque este tema es mucho más profundo y complejo, lo cual requiere mayor espacio y dedicación (Mora, 2003c; Serres, 2002), consideramos importante, por ser una componente básica de la enseñanza de las matemáticas, complementar brevemente algunas opiniones expuestas en los párrafos anteriores sobre la elaboración reflexiva de reglas, teoremas y afirmaciones matemáticas en general.

Las demostraciones en la matemática escolar, según diferentes estudios, han dejado de ser parte, lamentablemente, de los planes de enseñanza, de los libros de texto y las clases de matemáticas. Hace algunos años se consideraba importante demostrar algunas cosas, como por ejemplo los teoremas de Thales y Pitágoras, que $\sqrt{2}$ es un número irracional, identidades trigonométricas, construcción de fórmulas como la regla que permite resolver una ecuación de segundo grado o la demostración de algunas sucesiones aplicando el método de inducción completa. Estas demostraciones ya no se hacen; se argumenta que han sido eliminadas del currículo porque eran muy difíciles y los estudiantes no las comprendían. Sin embargo, la matemática escolar está llena de reglas y teoremas, muchos de ellos necesariamente tienen que ser explicados, construidos y demostrados en las clases de matemática. Tal como lo hemos señalado en los párrafos anteriores, el valor formativo de la demostración obliga a los docentes de matemática a que dediquen mayor tiempo a esta parte esencial de las matemáticas escolares.

Una buena educación matemática se debe caracterizar por la incorporación, en el proceso de aprendizaje y enseñanza, de estrategias didácticas que le brinden a los estudiantes la oportunidad de participar en la demostración de reglas y teoremas. Esto significa que la demostración tiene que convertirse realmente en parte fundamental de la acción educativa. En tal sentido, es muy importante crear e impulsar en los estudiantes las ganas y necesidad de demostrar cosas, que aunque sean afirmativas y provengan de los libros de texto o de los docentes, generen inquietud por la veracidad de tales afirmaciones. Las matemáticas, más que cualquier otra especialidad, están constituidas por demostraciones de reglas, teoremas y afirmaciones y por problemas en general. La necesidad de demostrar una afirmación matemática se convierte, siguiendo a Polya (1978), Schoenfeld (1985) y Guzmán (1993), por ejemplo, en un problema o varios problemas matemáticos. Es decir, la necesidad de demostración lleva al planteamiento de uno o más problemas, cuya solución exige un método ciertamente sistemático y con cierto grado de rigurosidad. Ésta debe ser también una de las tareas de la educación matemática.

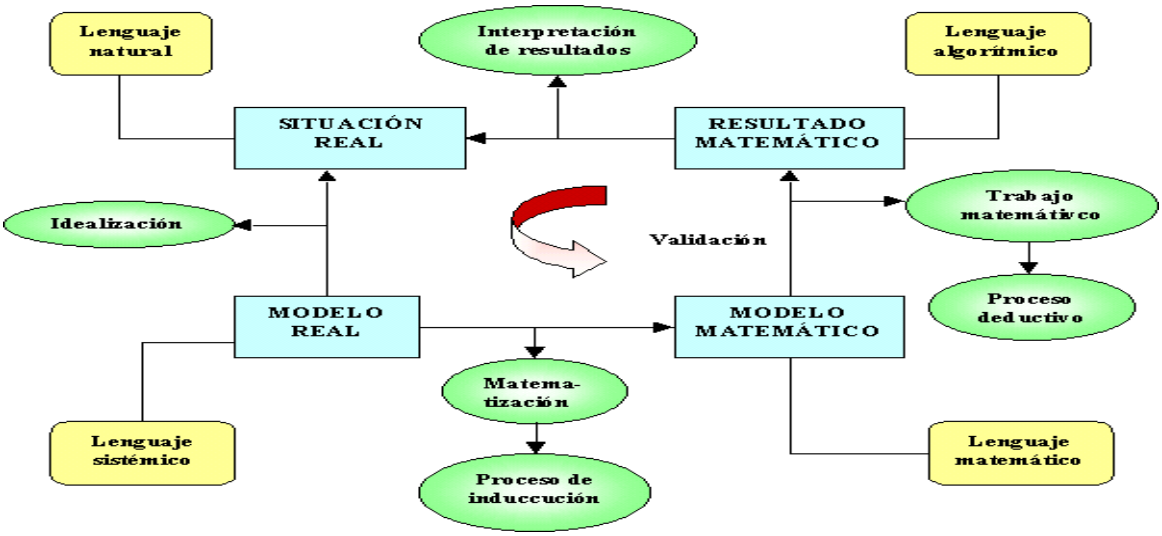
2.3.5. El aprendizaje de procedimientos y algoritmos matemáticos

Los procedimientos matemáticos juegan un papel muy importante en la matemática escolar, más que en las matemáticas profesionales, aunque cuando se demuestra un teorema o se elabora un concepto matemático desarrollamos un procedimiento caracterizado por cierta lógica y secuencia de pasos. Los procedimientos son en realidad soluciones esquematizadas de una determinada tarea y también los podemos ver como algoritmos; sin embargo, existe una pequeña diferencia entre ambos. Los primeros son más complejos y forman parte del trabajo cotidiano en matemáticas, mientras que los algoritmos se centran especialmente en seguir un conjunto de indicaciones secuenciales para resolver algunos tipos de tareas matemáticas muy especificas, para lo cual existe un camino estrictamente ordenado y rigurosamente mecánico.

La educación matemática escolar está impregnada por procedimientos y algoritmos, lo cual ha hecho que la enseñanza matemática en los diferentes niveles del sistema educativo, inclusive en las universidades, esté enfocada fundamentalmente al aprendizaje de algoritmos. No es grave, también contribuye a la formación matemática, los alumnos tienen que hacer uso correcto de ellos, inclusive aprender a construirlos. Ésta es una tarea importante de la educación matemática, sin embargo, hemos reducido el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas solamente a algoritmos, lo cual, según algunos educadores matemáticos, ha causado cierto daño al aprendizaje de las matemáticas. Tanto Blum (1985) como Skovsmose (1994), entre otros, señalan que dentro de la perspectiva de una educación matemática orientada hacia la resolución de problemas, los proyectos y las aplicaciones, los procedimientos y algoritmos matemáticos constituyen un elemento del eslabón matemático, lo cual es en cierta forma mucho más complejo, compacto y profundo que la simple aplicación de un algoritmo matemático. En la figura 4 presentamos una combinación de las propuestas de ambos autores. Entre los cinco momentos fundamentales que constituyen el modelo para la educación matemática surgido de la combinación de esas propuestas, la aplicación de los algoritmos constituye solamente una parte del complejo proceso que comprende la educación matemática escolar.

Figura 4.

Proceso de modelación matemática según Blum (1985) y Skovsmose (1994). Ver Mora y García (2003)



En la figura 4 podemos observar que la mayor parte de nuestra educación matemática descuida otros momentos del quehacer matemático tan o más importantes que la aplicación de procedimientos o algoritmos. En Mora (2002) se describe detalladamente, con la ayuda de un ejemplo concreto, el trabajo propuesto por Blum (1985). Allí se insiste en la necesidad de profundizar la educación matemática dentro de la perspectiva didáctica conocida como las aplicaciones y su proceso de modelación.

Es muy importante señalar, según nuestras observaciones de aula, que para los estudiantes no es sencillo seguir la secuencia de un algoritmo paso a paso. Cuando se tiene alguna experiencia y

habilidad, la aplicación de procedimientos matemáticos o algoritmos se realiza de manera automática. No ocurre así con los estudiantes quienes cada semana, probablemente, tienen que aprender un nuevo algoritmo matemático. Sabemos, de acuerdo con nuestras indagaciones, que los estudiantes se frenan con frecuencia cuando aplican un algoritmo, ya que aún conociéndolo no están seguros del paso siguiente. En ellos se genera cierta angustia puesto que siempre desean hacerlo bien y correctamente. Esta dificultad se multiplica cuando exigimos que deben hacerlo memorísticamente, sin haber comprendido en verdad los elementos que conforman los respectivos algoritmos.

Una de las razones por las cuales las matemáticas escolares se han convertido en una lista de algoritmos tiene que ver con la concepción didáctica en cuanto a que estos procedimientos compactos ayudan a simplificar la solución de muchos ejercicios matemáticos. Esta aparente ventaja tiene como consecuencia negativa, no solamente el hecho de que los estudiantes cometan muchos errores en la aplicación del algoritmo, sino que tiende a sacrificarse gran parte de los objetivos de la educación matemática. La solución didáctica, entonces, no está en suprimir los algoritmos o procedimientos de la enseñanza de las matemáticas, sino verlos como una parte del proceso del trabajo matemático dentro de la resolución de problemas, los proyectos y las aplicaciones con su respectiva modelación matemática.

Como hemos observado, el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares, el cual está comprendido desde el preescolar hasta los primeros semestres de la universidad, es mucho más complejo de lo que realmente pensamos los docentes de matemática, los matemáticos profesionales y la población en general. En los párrafos anteriores hemos expuesto, brevemente, algunos aspectos que deben ser tomados en cuenta constantemente tanto por los docentes de matemáticas como por todas aquellas personas que participan directa o indirectamente en el proceso educativo. En las páginas que siguen deseamos exponer, también sucintamente, aspectos inherentes a algunas concepciones muy importantes sobre el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

3. Cambios y principios didácticos en la educación matemática

1. La educación matemática en constante transformación

Antes de presentar las concepciones progresistas para el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares, con las cuales estamos identificados, consideramos importante señalar brevemente algunos hechos históricos en el campo de la pedagogía y particularmente de la educación matemática, los cuales han influido considerablemente en el desarrollo de tales concepciones metodológicas. Una de ellas es, por ejemplo, la concepción relacionada con la enseñanza abierta, la cual tiene que ver más con otras asignaturas diferentes a las matemáticas, pero que juega actualmente un papel fundamental en el campo del aprendizaje y la enseñaza de las matemáticas. El impulso del "pensamiento funcional" y la "conectividad del pensamiento" son, por el contrario, concepciones que provienen más bien de las matemáticas y que últimamente tienden a ser incorporadas en otras áreas científicas.

La escuela como institución y la enseñanza como parte de la acción concreta de la educación tienen la particularidad de aferrarse a las tradiciones. Los cambios se producen muy lentamente y la práctica educativa acepta pocas transformaciones, a pesar de la diversidad de estudios y trabajos que proponen constantemente, y en muchos casos de manera reiterada, modificaciones profundas de la filosofía educativa predominante y de las concepciones didácticas y pedagógicas en las instituciones escolares. También la didáctica general y las especiales han avanzado considerablemente, desarrollaron propuestas concretas, muchas de ellas ya se han puesto en práctica o se han validado con grandes conglomerados de docentes y estudiantes. Es el caso, por ejemplo, de la enseñanza abierta y el uso de tecnologías de punta como la computadora e internet en la enseñanza. Sobre ambas corrientes didácticas se ha escrito mucho durante los últimos diez años. El impulso de estas dos grandes tendencias ha tenido, sin embargo, muy poca resonancia en los respectivos sistemas educativos de nuestro continente, a pesar de las grandes expectativas que se han desarrollado en el marco de las reformas educativas.

Ya desde los tiempos de Comenius (1592-1670) se hablaba de los objetivos de la educación y métodos didácticos para lograr, a través de la enseñanza, que los estudiantes se adueñaran de los conocimientos científicos. Juan Enrique Pestalozzi (1746-1827), seguidor de las ideas expresadas por

Jacobo Rousseau (1712-1778) en *Emilio*, señalaba que la educación del ser humano debería comprender todas las fuerzas internas del sujeto. Pestalozzi insistía en que la escuela tiene que ser una institución para la "formación del pueblo". Estas ideas influyeron tremendamente en las inquietudes pedagógicas iniciales del gran maestro latinoamericano Simón Rodríguez (1771-1836), quien proponía una educación de calidad para los campesinos, los pobres y los olvidados. John Dewey (1859-1952) fundó en los Estados Unidos de Norteamérica la denominada "escuela democrática". Él y su colaborador William Kilpatrick (1871-1965) desarrollaron el método de proyectos desde el punto de vista didáctico y pedagógico (Mora, 2003d), ampliamente conocido en la actualidad en el campo del aprendizaje y la enseñanza. Durante el siglo pasado tuvieron lugar muchas ideas y experiencias pedagógicas sumamente interesantes, las cuales sería muy amplio describir en este trabajo. Algunos nombres característicos, entre muchos otros, son los de María Montessori (1870-1952) y su pedagogía orientada en los niños, Hugo Gaudig (1860-1923) y George Kerschensteiner (1854-1932) con sus visiones sobre la escuela orientada en el trabajo; Pavel Blonskij (1884-1941) quien trató de darle sentido didáctico pedagógico a los principios sobre producción y enseñanza propuestos originalmente por Carlos Marx; Antón Makarenko (1888-1939) con sus escuelas para niños trabajadores y huérfanos; Célestin Freinet (1896-1966) quien insistía en la relación entre juego, trabajo y escuela. El renombrado pedagogo del siglo XX Paulo Freire (1921-1996) con su concepción sobre la pedagogía libertaria, cuya influencia ha sido notable en el fortalecimiento y continuidad de las ampliamente conocidas experiencias pedagógicas como el Kindergarten en Alemania y las Escuelas Comunitarias en Inglaterra. Finalmente dos importantes pedagogos que han clamado por una educación humanista y orientada en la investigación son Lawrence Stenhouse (1998) y Harmut von Hentig (2002).

En cuanto a la educación matemática propiamente dicha, durante el siglo pasado tuvieron lugar algunas reformas muy importantes en el ámbito internacional, la más conocida ha sido la impulsada entre finales de los años cincuenta y principios de los sesenta, conocida por los nombres de "reforma de la educación matemática", "nueva matemática" o "matemática moderna". Esta reforma, al igual que otros impulsos posteriores como los estudios PIMSS, SIMSS, TIMSS, PISA y PIRLS han sido fomentados por la OECD (Organisation for the Economic Co-operation and Development) y repercuten considerablemente en cambios importantes tanto de planes de estudio como de las concepciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, el lenguaje y las ciencias naturales.

Antes de los años ochenta las reformas en el campo de la educación matemática estaban considerablemente influenciadas por dos visiones sobre la enseñanza de las matemáticas, por una parte por quienes consideraban que la educación matemática debía estar orientada hacia la profesionalización del conocimiento matemático, en este caso los matemáticos profesionales, y por el otro quienes pensaban que la pedagogía, la sicología y la didáctica deberían jugar un papel importante en la enseñanza de las matemáticas (Gómez-Granell y Fraile, 1993). En la actualidad ya se habla de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica (Kilpatrick, 1994 y Mora, 2002).

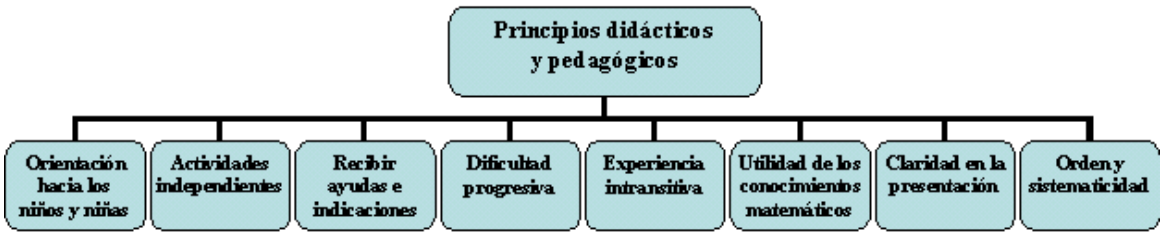
Por otra parte, la educación matemática está en constante transformación. Estos cambios ocurren por la influencia del desarrollo de ideas y conceptos pedagógicos, crecimiento del conocimiento matemático, necesidades de la población e intereses y objetivos políticos, pedagógicos y didácticos. Es así como tiende a estandarizarse un currículo internacional para la educación matemática hasta el duodécimo grado por la presión que viene haciendo internacionalmente el NTCM (National Council of Teachers of Mathematics); en los años ochenta se da un avance sumamente importante en cuanto a la ampliamente conocida "enseñanza abierta" en los diferentes niveles del sistema educativo. Durante los años noventa surgen, con muchas expectativas, la computadora y los diferentes softwares en el campo de la educación matemática, especialmente en álgebra y geometría. Actualmente ya existen algunos programas ampliamente difundidos como el *Derive, Euklid, Cabrí,*etc. Igualmente en la década de los noventa se realiza un gran número de estudios comparativos internacionales, no solamente sobre rendimiento en matemáticas y lenguaje, sino además sobre factores asociados al proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, del lenguaje y las ciencias naturales. Entre los estudios más recientes podemos señalar los siguientes: TIMSS, PISA, LLECE y el PIRLS. Los resultados y características de tales estudios indican que es necesario, casi obligante, cambiar radicalmente la cultura de enseñar matemáticas en las instituciones escolares (Mora, 2000 y 2003d).

Como hemos visto la educación matemática está sujeta a muchas transformaciones, influenciadas o bien por el desarrollo de la misma matemática o por el adelanto vertiginoso de disciplinas tales como la pedagogía, didáctica, sicología, informática, etc.

3.2. Preceptos didácticos y pedagógicos en la educación matemática

En vista de que la enseñanza es sumamente compleja, los docentes en general y los de matemáticas en particular tienen que asumir, con reiterada frecuencia, las consecuencias que trae la toma de desiciones y acciones tanto en las fases preparatorias de la enseñanza como durante el desarrollo del proceso. Para evitar, en cierta forma, tales consecuencias los docentes, con mucha razón, se afianzan en preceptos didácticos y pedagógicos aceptados por la comunidad de educadores matemáticos nacional o internacionalmente. Tal vez el temor que tienen los docentes por las consecuencias que puedan provocar sus innovaciones didácticas y pedagógicas, puede ser una de las razones importantes por las cuales existe cierta resistencia a los cambios y transformaciones deseados por pedagogos y didactas progresistas en diferentes épocas y momentos históricos. Algunos de esos principios didácticos serán presentados muy sucintamente a continuación.

Figura 5. Algunos principios didácticos y pedagógicos en la educación matemática



a) En primer lugar, toda actividad de enseñanza tiene que estar *orientada hacia los niños y niñas*, en sus intereses, capacidades, habilidades y dificultades. Sobre todo en la escuela básica (en sus tres etapas o ciclos) los niños y niñas deben ser realmente el centro de toda enseñanza y por lo tanto de la educación matemática.

b) En segundo lugar, tenemos el precepto de la *actividad independiente* de los niños y jóvenes. Esto significa que los estudiantes de cualquier edad tienen el derecho a trabajar dentro y fuera del aula de manera autónoma. Los sistemas educativos y los docentes en particular deben brindar los recursos y las posibilidades para que las(os) niñas(os) y jóvenes trabajen las matemáticas, y cualquier otra asignatura, de manera activa, creativa, colectiva e independiente.

c) Los estudiantes deben recibir las respectivas *ayudas e indicaciones* por parte de los docentes durante y después del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Tanto las indicaciones claras y detalladas como las ayudas pertinentes e inmediatas se hacen más necesarias cuando los docentes ponen en práctica concepciones didácticas tales como la resolución de problemas, las aplicaciones y su proceso de *modelación matemática* y la enseñanza por proyectos.

d) Ya desde tiempos inmemorables, la didáctica se ha preocupado por establecer como prioritario el principio de la *dificultad progresiva*. Esto significa que las unidades de enseñanza en cualquier sistema educativo deben estar organizadas de tal manera que los contenidos tratados pasen de lo más sencillo a lo más complejo. Esta visión didáctica no contradice la idea del desarrollo de una enseñaza basada en unidades generadoras de aprendizaje o temas generadores, tal como lo ha señalado ampliamente en sus diferentes trabajos Paulo Freire (1973) y también Manning, Manning y Long (2000). Sin embargo hay quienes consideran, también desde hace muchos siglos, que se debe enfocar la enseñanza desde lo general a lo particular. Los docentes son, de acuerdo con su formación, la temática de estudio y las estrategias didácticas, quienes deciden en última instancia cómo enfocar su trabajo didáctico y pedagógico en las aulas de clases.

e) El precepto didáctico conocido como la *experiencia intransitiva* consiste, tal como lo hemos mencionado anteriormente, en prestar atención a las ideas intuitivas previas de los estudiantes. Se habla con frecuencia de los conocimientos previos. Esta afirmación es, en cierta forma, imprecisa ya que no siempre los seres humanos, independientemente de su escolaridad, y por razones conocidas en cuanto al olvido acelerado de lo aprendido, disponen de un conocimiento previo elaborado; sin embargo, la experiencia intransitiva garantiza la existencia de ideas y conocimientos que se acercan a las explicaciones teóricas aceptadas científicamente.

f) El principio de la *utilidad de los conocimientos* adquiridos en las instituciones educativas, concretamente de las matemáticas escolares. Las matemáticas tienen la particularidad de ser muy amplias, interesantes, útiles y significativamente importantes para los seres humanos. Sin embargo, también se puede hacer de las matemáticas una actividad sumamente aburrida e inútil. Hemos constatado, durante algunos trabajos de investigación, que los docentes dedican prácticamente tres meses a un tema matemático, como la radicación en el noveno grado, o las identidades trigonométricas en el undécimo grado. Aunque los temas son importantes desde el punto de vista de las matemáticas y sus aplicaciones, los estudiantes no encuentran ningún sentido a listas interminables de ejercicios sin utilidad o importancia fuera y dentro de las matemáticas. El precepto utilitario de las matemáticas escolares, entonces, tiene que ser rescatado.

g) El *principio de la claridad* en cuanto a la presentación de los conocimientos matemáticos. Con frecuencia oímos las críticas que hacen nuestros estudiantes a los(as) profesores(as) de matemáticas porque no entienden realmente las explicaciones que realizan los docentes durante el desarrollo de sus clases. En muchos casos, los docentes de matemáticas presentan los conceptos matemáticos a sus estudiantes tal como están establecidos en los libros de texto o como fueron adquiridos en las instituciones de educación superior durante su formación académica. Esta forma de tratar los conocimientos matemáticos escolares con los estudiantes contradice considerablemente el desarrollo mismo de las matemáticas y del trabajo que realizan los matemáticos profesionales. Los conocimientos tienen que ser trabajados en clase mediante la discusión, reflexión y construcción por parte de quienes intervienen en el proceso de aprendizaje y enseñanza.

h) El *orden y la sistematicidad* en cuanto a la estructuración y presentación de los conocimientos científicos es un principio didáctico muy antiguo, el cual intentan poner en práctica todos los docentes en cualquier nivel del sistema educativo. No importa que se trabaje, didácticamente hablando, con estrategias de aprendizaje abiertas y altamente complejas como los proyectos o la resolución de problemas. Los docentes elaboran sus actividades sistemática y ordenadamente, lo cual, probablemente, tendrá un mejor y mayor efecto en los aprendizajes de los estudiantes. También es conocido, desde el punto de vista de las teorías cognitivas del aprendizaje, que los seres humanos elaboran conceptos mentales obedeciendo a ciertas estructuras de organización sistemáticas y ordenadas de situaciones contextuales externas.

Durante la enseñanza los(as) profesores(as), no solamente de matemáticas, deberían poner en práctica la mayor parte de estos principios. Ellos están relacionados entre sí de manera implícita y automática, ya que contribuyen a establecer normas sociomatemáticas, objetivos, experiencias, actividades, etc. Muchos de estos principios forman parte actualmente de las investigaciones en el campo de la educación matemática y constituyen puntos de partida para las discusiones didácticas en diferentes centros de investigación en el ámbito internacional (Reverand, 2003; Lave, 1991).

Los ocho principios didácticos mencionados en los párrafos anteriores no son los únicos que determinan el proceso de aprendizaje y enseñanza, en particular de las matemáticas. Muchos autores han establecido listas muy bien elaboradas de preceptos didácticos; desde Comenius (1640/1993) en su ampliamente conocida*Didáctica Magna* hasta trabajos referidos a la didáctica en general como Meyer (1998), pasando por aportes muy específicos en el campo de la didáctica de las matemáticas como ocurre con el excelente trabajo de Wittmann (1997), quien en su obra *Preguntas básicas de la enseñanza de las matemáticas* establece claramente un conjunto de principios didácticos y pedagógicos para esta asignatura. Este autor señala que los preceptos didácticos están determinados, en buena medida, por las experiencias de los docentes de matemática y se ajustan a las vivencias didácticas y de la especialidad que han tenido los docentes tanto en su proceso de formación como de actualización didáctica. Los preceptos didácticos antes mencionados están presentes, genéricamente hablando, en todas las estrategias de aprendizaje y enseñanza, concretamente en el tratamiento de las matemáticas escolares. Su presencia en cada una de las concepciones didácticas tendrá un determinado peso de acuerdo con cada una ellas, tal como lo veremos a continuación.

4. Concepciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas

En el campo de la didáctica general y de la educación matemática en particular se viene desarrollando un conjunto muy importante de concepciones de aprendizaje y enseñanza, las cuales afectan directamente a todas las áreas del conocimiento científico tratado en las instituciones escolares, las cuales han encontrado alta receptividad en los educadores matemáticos. Desde hace más de 55 años,

con los aportes de Polya (1978) y posteriormente, a principios de los años sesenta, Hans Freudenthal (1967) con su famoso libro *Matemáticas para la vida cotidiana* dieron impulso a las discusiones y al desarrollo de nuevas concepciones en el campo del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Entre las más sobresalientes podemos mencionar las siguientes*: la enseñaza de las matemáticas desde su propia* ***génesis****, la educación matemática orientada en la* ***resolución de problemas****, enseñanza de las matemáticas orientada hacia* ***objetivos formativos****, educación matemática desde el punto de vista de las* ***aplicaciones*** *y la* ***modelación****, enseñanza de las matemáticas basada en* ***proyectos****; aprendizaje y enseñanza de las matemáticas tomando en cuenta* ***el plan semanal, el aprendizaje libre y trabajo en estaciones*** *y, finalmente, la educación matemática a través del uso de la* ***informática****.*

Estas siete concepciones están muchas veces relacionadas unas con otras y pueden ser aplicadas indistintamente por los docentes durante el desarrollo de las actividades de aprendizaje y enseñanza a lo largo del año escolar. Muchas autores (Guzmán, 1993) incorporan otras estrategias como los juegos, la historia o la experimentación matemática. Sin embargo, consideramos que sería muy amplio relatar detalladamente cada una de ellas, lo cual no significa que las demás dejen de ser muy importantes en la educación matemática. Cada concepción didáctica requiere un desarrollo teórico profundo, lo cual forma parte de algunas de nuestras actividades en cuando a las reflexiones que venimos haciendo en el campo de la educación matemática escolar.

4.1. Enseñanza de las matemáticas a partir de su propia génesis

Hay muchos autores quienes han insistido en la necesidad de enseñar matemáticas desde la perspectiva de la misma matemática. Esto significa que la esencia de la enseñanza de las matemáticas debe estar en ellas mismas y en su desarrollo histórico (Kline, 1985; Wittmann, 1997). Además de los matemáticos profesionales, quienes insisten en la autenticidad de la enseñanza de las matemáticas, los psicólogos vinculados con la educación matemática (Nesher, 2000; Abreu, 2000; Bishop. 2000, Reverand, 2003) por su parte consideran que las matemáticas y su enseñanza deben adecuarse al desarrollo cognitivo de los estudiantes. Esto quiere decir que la educación matemática tiene que romper con la larga tradición de la enseñanza orientada en el mundo axiomático de las matemáticas. Se considera que la visión axiomática de la enseñanza de las matemáticas asume esta disciplina como un constructo terminado, donde se ha olvidado o apartado el proceso de creación y realización matemática, así como el papel que juegan los factores socioculturales (Reverand, 2003).

Esta visión solo es posible poniéndola en práctica con personas ya maduras en cuanto a su experiencia con las matemáticas (Davis y Hersh, 1986). Las(os) niñas(os)os y los jóvenes que aprenden a desenvolverse con las matemáticas no dominan ni están interesados en el comportamiento axiomático de esta especialidad, independientemente de su belleza, coherencia e importancia intramatemática. Wittmann (1997) señala que la enseñanza de las matemáticas debe trabajarse en las aulas según las potencialidades y formas de percibir el mundo por parte del niño, siempre tomando en cuenta la esencia de las matemáticas como disciplina científica. Este punto de vista ha llevado a Erich Christian Wittmann y sus colaboradores a desarrollar, después de más de 25 años ininterrumpidos de investigación didáctica, la elaboración de un conjunto muy importante de materiales didácticos, hasta el momento para los seis primeros grados de la escuela básica.

La idea central de la enseñanza de las matemáticas desde la perspectiva de su propia génesis fue compartida a principios del siglo pasado por matemáticos y psicólogos. Se considera que las matemáticas deben ser planificadas y enseñadas a partir de las capacidades intelectuales de las personas y no a partir de la sistematicidad que caracteriza a las propias matemáticas. Esto significa que las matemáticas escolares tienen que ser concebidas de acuerdo con el desarrollo natural de las(os) niñas(os) y los jóvenes y no en correspondencia con las estructuras abstractas y complejas que conforman el gran árbol de las matemáticas.

Estos puntos de vista, expresados hace prácticamente un siglo, han recobrado mucha fuerza actualmente con los planteamientos del constructivismo (Ernest, 1994; Glasersfeld, 1991). Se considera que debemos pensar en trabajar las matemáticas con los niños de tal manera que ellos, ya desde muy temprana edad, descubran y construyan las matemáticas de acuerdo con sus potencialidades intelectuales y las actividades didácticas presentadas por los docentes. Esto no quiere decir que los estudiantes tengan que vivir las mismas experiencias por las cuales han pasado quienes históricamente dedicaron muchos años de su vida al trabajo matemático. Pero, desde el punto de

vista de las matemáticas propiamente dichas, es posible desarrollar un trabajo en el cual los estudiantes, desde muy temprana edad, puedan descubrir e inventar cada vez y en cada clase buena parte de las matemáticas escolares.

Es importante no confundir tres aspectos básicos relacionados con las matemáticas y su historia. Por una parte, hay que tomar en cuenta que el desarrollo histórico de las matemáticas ha obedecido a intereses, inquietudes y necesidades de los seres humanos, lo cual significa que debemos concienciar a nuestros estudiantes sobre el contexto y el momento histórico donde ha tenido lugar su desarrollo (Wussing, 1998). En segundo lugar se puede hacer uso de la historia como estrategia didáctica para aprender y enseñar matemáticas y, en tercer lugar, tener presente que trabajar las matemáticas desde su propia génesis significa recrear siempre los conceptos matemáticos, aunque éstos sean muy sencillos, tales como históricamente los ha trabajado el ser humano; es decir, mediante la intuición, el ensayo y error, la indagación, la estimación y la elaboración de las proposiciones matemáticas de lo particular y concreto hasta lo general y abstracto.

4.2. Enseñanza de las matemáticas orientada hacia la resolución de problemas

Nos encontramos con un problema, en sentido estricto, si ante la presencia de una tarea o actividad desconocida requerimos de algunas reflexiones y consideraciones para poder suministrar coherentemente una solución satisfactoria. La enseñanza de las matemáticas, particularmente, está llena de situaciones inesperadas, lo cual podríamos señalar como un mundo desconocido transitado por interrogantes mas que por soluciones o respuestas. No ocurre con frecuencia que los estudiantes suministren fácilmente soluciones directas a la variedad de problemáticas presentadas continuamente en las clases prácticamente en todas las asignaturas. Si esto ocurre, es porque los estudiantes están entrenados en la resolución de problemas o porque ellos reciben de parte de los docentes o del material de trabajo algunas sugerencias o indicaciones que les permiten encontrar una estrategia para la solución definitiva del respectivo problema.

No podemos afirmar aún que las clases de matemáticas pueden desarrollarse íntegramente dentro de esta perspectiva didáctica, aunque en efecto son muchos los intentos que se han realizado por establecer una cultura de resolución de problemas en las aulas de clase; es suficiente mencionar, entre la gran cantidad de personas que se han dedicado al tema de la resolución de problemas desde diferentes ángulos, a Polya (1978), Schoenfeld (1985), Sánchez y Fernández (2003) y Guzmán (1993). La brevedad y, al mismo tiempo, la amplitud temática del presente trabajo no nos permiten presentar los diferentes elementos que caracterizan la concepción sobre resolución de problemas en la educación matemática; deseamos, sin embargo, establecer algunos elementos para la discusión.

El valor didáctico y pedagógico de la resolución de problemas está precisamente en la posibilidad que esta tendencia brinda para que los estudiantes puedan dedicarse de manera independiente y autónoma a la búsqueda de ideas y estrategias novedosas para alcanzar una solución adecuada al problema originalmente planteado. Los estudiantes deben aprovechar la oportunidad que brindan los docentes en cuanto al tiempo y los recursos didácticos necesarios para llegar oportunamente a la solución definitiva del respectivo problema, aunque para los docentes resulte, desde el punto de vista organizativo, difícil desarrollar los contenidos programáticos a partir de una variedad de problemas previamente seleccionados de los libros de texto propuestos por los mismos docentes, tal como lo sugieren algunos autores.

Ya los griegos, antes de Euclides, proclamaban un conjunto de pasos heurísticos, los cuales podrían contribuir con la solución de diferentes problemas en las ciencias naturales y en las matemáticas. Se decía en ese entonces que los pasos deberían ser los siguientes: tarea, indicaciones, tesis, construcción, demostración y conclusiones. Esta secuencia de indicadores necesarios para la resolución de problemas matemáticos se usa actualmente con mucha fuerza, por ejemplo, en los diferentes paradigmas metodológicos de investigación. Tal estructura ha sufrido algunas modificaciones, las más recientes gracias, por ejemplo, a John Dewey (1998) o George Polya (1978). Cada vez más se crean o inventan nuevos esquemas, sin embargo ellos tienen su basamento en las ideas presentadas hace más de dos mil años. Hasta el momento sin embargo, según lo establecido en estudios como el TIMSS y el PISA, son muy pocos los problemas que se trabajan o se resuelven en las clases de matemáticas. Parece ser, igualmente, que los seres humanos no siguen modelos genéricos cuando están resolviendo problemas intra o extramatemáticos, tal como se ha pensado hasta el presente (Reverand, 2003). A esta conclusión también han llegado otros investigadores en el marco

de los estudios internacionales como el TIMSS y el PISA (Mora, 2003i). En la figura 6 se observa un ejemplo, tomado del estudio videograbado correspondiente al TIMSS.

Figura 6. Ejemplo de un problema y los pasos en su resolución

1. Planteamiento de un problema complejo.

   Ejemplo:

   "250 g de margarina cuestan Bs. 300, ¿cuánto costarán 400 g el próximo año, suponiendo que la inflación será de 10%?"

2. Trabajo individual, en parejas o en grupos.
3. Presentación de diferentes soluciones.
4. Discusión de las soluciones.
5. Formalización de los contenidos matemáticos.
6. Problemas similares de consolidación.

Estos son los seis pasos que caracterizan el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas orientada en las aplicaciones realistas.

Todos sabemos, inclusive quienes tienen muy poca relación con las matemáticas, que los problemas constituyen su esencia y dinamismo. En cada concepción didáctica, además de la presente, los problemas juegan un papel fundamental. Los docentes de matemáticas estamos familiarizados con una inmensa variedad de problemas intramatemáticos, muy pocos extramatemáticos y menos aún con problemas cuyo contenido matemático esté explícitamente expresado en su planteamiento complejo. Entre la variedad de problemas hay algunos que pueden orientar realmente el proceso de aprendizaje y enseñanza durante cierto tiempo. Algunas características de este tipo de problemas serán presentadas de manera muy breve a continuación:

a) Hay problemas cuyo tratamiento en las clases de matemáticas podría servir para el desarrollo de temáticas complejas. Entre ellos podemos mencionar el cálculo de áreas o volúmenes, la producción, descripción y presentación de funciones, líneas, áreas, cuerpos e imágenes.

b) Algunos problemas son ideales como parte de la introducción de un tema matemático particular, el cual puede ser, inclusive, trabajado a lo largo del tratamiento del respectivo tema. Un problema utilizado con frecuencia para la introducción de los números negativos es la resta de dos números, cuyo sustraendo es mayor que el minuendo. O la introducción de los radicales, los números complejos, etc. Estos problemas pueden ser trabajados durante semanas, mientras que otros, como por ejemplo el problema de demostrar que el resultado de multiplicar dos números negativos es un número positivo, puede ser trabajado durante algunas horas de clases.

c) Existe una variedad de situaciones que pueden ser presentadas como problemas y aparecen con frecuencia en la educación matemática, independientemente de su relación con los contenidos matemáticos que estén desarrollándose. Estos problemas tienen que ver más con el desarrollo de métodos que con el mismo contenido matemático. Tenemos los casos, por ejemplo, de la búsqueda de relaciones entre objetos matemáticos, descubrir y crear nuevas situaciones similares a las trabajadas en clase, el dominio de reglas y su utilización como medio argumentativo, el desarrollo de algoritmos, la optimización, la elaboración o el descubrimiento de procedimientos matemáticos genéricos, etc. Éstos y otros aspectos pueden ser enfocados como problemas, no tanto matemáticos, que podrían motivar y contribuir con una educación matemática con mayor significado didáctico que el simple aprendizaje de recetas mnemotécnicas.

El aprendizaje y la construcción de términos matemáticos, la comprensión de teoremas y su demostración, el dominio de estrategias de demostración, el desarrollo de algoritmos, las aplicaciones, problemáticas generadoras de aprendizaje y el proceso de modelación tienen que ser vinculados con

una concepción de educación matemática orientada en la resolución de problemas. Por ello se habla con mucho énfasis de la enseñanza holística y unificadora, ya que una educación matemática dentro de una sola perspectiva didáctica limita el complejo mundo del aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina. Una enseñanza, por otro lado, aunque esté concebida dentro de esta concepción didáctica, que no tenga un objetivo claramente establecido y que, además, no disponga de una estructura constituida por un conjunto de actividades sistemáticamente bien concebidas, no podrá ser considerada como parte de una educación matemática orientada en la resolución de problemas. No se trata realmente del grado de dificultad que puedan tener los problemas, sino más bien de su calidad y de la respectiva estructuración didáctica, la cual determina casi siempre el desarrollo adecuado del proceso de aprendizaje y enseñanza.

La resolución de problemas, reiteramos, no puede concebirse de manera aislada de las demás concepciones y estrategias didácticas, tal como lo veremos en los próximos párrafos.

4.3. Enseñanza de las matemáticas orientada hacia objetivos formativos

En el año 1997, el profesor Hans Werner Heymann presentó su excelente disertación, un trabajo sumamente extenso y ampliamente fundamentado, el cual generó en su momento una gran discusión sobre los objetivos de la educación matemática e inclusive fue aplaudido por buena parte de la población y criticado por matemáticos profesionales, quienes consideraron que sus afirmaciones y conclusiones atentaban contra la enseñanza de las matemáticas formales. En su análisis el profesor Heymann considera que la educación matemática escolar debe transformarse profundamente y redefinir sus objetivos, ya que la matemática que se trabaja en las instituciones escolares actualmente y la forma como se desarrolla el proceso de aprendizaje y enseñanza en las escuelas no contribuyen realmente con la formación integral de los ciudadanos.

Este punto de vista, argumentado sabiamente por el autor, tuvo su máxima expresión en los años setenta, cuando pedagogos y didáctas exigían una nueva reforma, a raíz del fracaso de la matemática moderna, en el campo de la educación matemática (Winter, 1991; Zumpe, 1984). Esta reforma no debería estar orientada exclusivamente a los objetivos de la educación matemática y cambios en los planes de enseñanza. Ella debería orientarse fundamentalmente, por una parte, a los aspectos teóricos, epistemológicos, de la educación matemática y, por otra parte, a la refundación de los contenidos matemáticos escolares, así como a la incorporación de las nuevas tendencias para la enseñaza de las matemáticas presentes hacía más de 25 años. Hasta el momento esa gran reforma aún no ha tenido lugar en aquellos países donde la discusión didáctica ocurre con frecuencia. Sin embargo, los estudios comparativos internacionales como el TIMSS, PISA y PIRSL y muchos estudios regionales o nacionales particulares han delineado algunos caminos que podrían impulsar con mayor fuerza estos cambios. También el avance de la investigación en el campo de la educación matemática y la implementación de ideas innovadoras en las instituciones escolares ha hecho que se piense, en el ámbito internacional, con mayor fuerza sobre la posibilidad de hacer cambios profundos en relación con la educación matemática.

La orientación de la educación matemática en y hacia objetivos formativos pretende reformular la enseñanza de las matemáticas de tal manera que los estudiantes, los docentes y la población en general conciban las matemáticas como parte de su formación escolar, la cual les puede servir tanto para el desarrollo de sus potencialidades intelectuales individuales como para un mejor y eficiente desenvolvimiento en la sociedad. No se trata de escribir nuevamente los planes de enseñanza en términos de una didáctica basada en objetivos operacionales, lo cual ha sido ampliamente criticado, ya desde los inicios de la década de los ochenta (Gimeno, 1998), la cual trató de buscarle sentido a los objetivos de la enseñanza intentando redactar en términos operacionales los objetivos existentes en los planes de enseñaza. Esta artificialidad del cambio propuesto generó mayores problemas en el campo concreto de la educación matemática. Uno de los críticos más fuertes de esta tendencia fue Hans Freudenthal (1978: 110), quien consideraba que el problema no radicaba en la forma como se redactarían los objetivos de enseñanza, sino en la importancia y utilidad de los contenidos matemáticos para la población.

En la actualidad, afortunadamente, la visión de los objetivos operacionales ya ha sido superada, tanto desde el punto de vista de la discusión teórica como de la práctica educativa, y la tarea está, tal como lo señalan Heymann (1997), Keitel (1989) y Damerow (1987) en concebir una educación matemática

cuyo objetivo fundamental sea contribuir activamente con la formación integral de todos los seres humanos.

Por supuesto que estamos de acuerdo en cuanto a la necesidad de que los resultados de los aprendizajes matemáticos sean eficientes. Este es un deseo y un objetivo general de cada docente y de todos los sistemas educativos. Sin embargo, la calidad de la enseñanza no se logrará con una educación matemática artificial y sin sentido para las personas. Una educación matemática enfocada desde la perspectiva del logro de objetivos operacionales queda restringida exclusivamente a la superficialidad de los aprendizajes matemáticos. Por el contrario, la educación matemática orientada en y hacia la formación integral de todos los ciudadanos pretende que los aprendizajes matemáticos, además de ser significativamente útiles, pasen a formar parte permanente del bagaje intelectual de los sujetos. Esta última concepción de la educación matemática implica, también, cambios profundos en cuanto a la evaluación de los aprendizajes. Igualmente no podemos pensar que los resultados de las reformas educativas, concretamente de los cambios impulsados para mejorar las estrategias de aprendizaje y enseñanza en las aulas de clase, puedan ser fácilmente detectados mediante instrumentos basados en preguntas de selección simple o múltiple que reflejan la cuestionada visión de una educación orientada en objetivos operaciones. La evaluación de la calidad de la enseñanza es mucho más compleja y profunda, la cual requiere de la aplicación de métodos, estrategias e instrumentos de investigación, en el campo de la educación, actualizados, profundos y novedosos (Mora, 2003e).

Aunque la idea de una educación matemática concebida dentro de la visión de los objetivos operacionales ya ha pasado de moda y se impone, con mayor fuerza, una educación matemática cuyo objetivo fundamental sea la formación general básica, hay que estar atentos porque una de las pocas consecuencias negativas de los estudios comparativos internacionales es el afán que tienen muchos países por figurar en los primeros lugares en cuanto a rendimiento escolar se refiere, lo cual podría inducir a una reformulación de la educación matemática desde el punto de vista de los objetivos operacionales. Hasta el presente, los estudios comparativos internacionales realizados durante los últimos ocho años, reflejan, más bien, la necesidad de enfocar la educación matemática desde las siete perspectivas descritas en el presente trabajo.

4.4. Enseñanza de las matemáticas basada en las aplicaciones y la modelación

Ésta ha sido una de las tendencias más importantes en la educación matemática, ya que las mismas, desde tiempos muy remotos, se han venido desarrollando gracias a la diversidad de problemas prácticos cuyas soluciones requieren, casi siempre, la aplicación de conceptos matemáticos que van desde la matemática elemental hasta teorías matemáticas altamente complejas. En tal sentido, los educadores matemáticos se han preocupado, últimamente con mayor énfasis, por la incorporación de las aplicaciones y la respectiva modelación matemática en el proceso de su aprendizaje y enseñanza (Freudenthal, 1973; Blum, 1985; Skovsmose, 1994, Winter, 1991; Mora, 2002). Tradicionalmente se presentan los problemas prácticos, aquellos relacionados con la realidad, en forma de tareas verbales. Esto no significa un capricho por parte de los docentes de matemáticas o de los autores de materiales instruccionales como libros de texto, por ejemplo. Constituyen la esencia de las aplicaciones, ya que según Ole Skovsmose y Hans Freudenthal, por citar dos autores conocidos en el campo de la aplicaciones y la modelación matemática, la realidad está escrita en un lenguaje natural, complejo y fenomenológico (figura 4), la cual hay que expresarla necesariamente en el lenguaje materno manejado por los participantes en los cursos de matemáticas.

Sabemos que existe poca familiaridad, tanto de los docentes como de los estudiantes, con una educación matemática que exija el manejo de diferentes formas de lenguaje, desde la construcción verbal de un problema a partir de una situación realista, pasando por el manejo correcto del lenguaje escrito, hasta el manejo adecuado del lenguaje algorítmico de aquellos contenidos matemáticos necesarios para la solución de la problemática original y la presentación, usando diferentes tipos de lenguaje, de los resultados definitivos. Un objetivo de la educación matemática radica, precisamente, en desarrollar capacidades y habilidades en los estudiantes para que se desenvuelvan exitosamente dentro de esta variedad de lenguajes que están presentes explicita o implícitamente en la solución de un problema realista (Figura 4). Allí podemos observar que se trata realmente de un proceso de cambio o traducción entre varios tipos o formas de lenguaje. Esta tarea no es sencilla, ella exige de parte de los estudiantes y de los docentes un mayor esfuerzo durante el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. No es suficiente presentar a los estudiantes, en las clases de matemáticas, situaciones realistas complejas; es necesario un profundo trabajo de

preparación y reflexión didáctica antes y durante el desarrollo de las respectivas unidades de enseñanza.

Los problemas prácticos se presentan, casi siempre, en forma de situaciones especiales complejas, éstas tienen que cumplir, según la opinión generalizada de la mayor parte de los autores que han teorizado sobre esta materia, los siguientes requisitos:

a. Las situaciones y las informaciones tienen que ser reales; es decir, ellas deben provenir de la vida genuina y de fenómenos verdaderos.
b. Las situaciones problemáticas tienen que ser claramente entendidas por todos los estudiantes. Ellas no deben contener, preferiblemente, informaciones difíciles de comprender y trabajar durante el desarrollo de la unidad de enseñanza.
c. Las situaciones iniciales deben contener, en lo posible, informaciones ricas en contenidos interesantes para los estudiantes e incluir diversas interrogantes, lo cual permitirá un trabajo diversificado y diferenciado de acuerdo con las características del curso.
d. Las situaciones realistas deben, en lo posible, incorporar otras áreas del conocimiento científico, lo cual posibilita una educación matemática holística y temática.
e. Las situaciones realistas deben permitir el tratamiento de amplios y variados contenidos matemáticos en correspondencia con el grado donde se desarrolla el proceso de aprendizaje y enseñanza.

Es ampliamente conocido que las matemáticas se aplican de diversas maneras en diferentes áreas y situaciones de la vida cotidiana. Hay quienes consideran que, desde el punto de vista didáctico, existen, realmente, dos formas de concebir las aplicaciones matemáticas. Se habla de aplicaciones internas a las matemáticas cuando las problemáticas de estudio se refieren exclusivamente a las matemáticas, sin relación con los fenómenos reales. Mientras que estamos en presencia de aplicaciones externas a las matemáticas, si éstas están incluidas dentro de las cinco condiciones señaladas anteriormente. Según nuestro punto de vista las aplicaciones y el proceso de modelación matemática tendrán mayor riqueza didáctica si las situaciones problemáticas se relacionan con problemas sociales o naturales. En tal sentido, nos inclinamos por una educación matemática cuyos problemas generadores sean mayoritariamente extramatemáticos.

Desde el punto de vista del trabajo práctico en o fuera del aula con estudiantes de cualquier nivel del sistema educativo, las experiencias concretas basadas en esta concepción para el aprendizaje y la enseñaza de las matemáticas han fortalecido tres líneas de acción didáctica:

1) Se inicia el proceso de aprendizaje y enseñanza con un problema práctico, el cual permitirá durante un cierto tiempo, de acuerdo con la complejidad del mismo, el desarrollo de un conjunto de contenidos matemáticos siempre vinculados a la solución de la situación original.

2) Después de haber trabajado algunos contenidos matemáticos establecidos en los planes de enseñanza, se recurre inmediatamente al tratamiento de situaciones realistas, cuya solución exige la utilización de tales contenidos.

3) Debido a la fuerza didáctica que caracteriza a esta concepción, los docentes de matemática pueden combinar ambas posibilidades. Se empieza el trabajo de aula con algunas de las dos formas anteriores, saltando a la segunda de acuerdo con la estructuración de las unidades de enseñanza, de los problemas planteados y los contenidos matemáticos trabajados. Esta tercera opción es menos frecuente y se debe poner en práctica, preferiblemente, en grados superiores.

Las aplicaciones y su proceso de modelación en la educación matemática tuvieron un gran empuje gracias a los aportes de Hans Freudenthal (1978) quien es el impulsor y creador del concepto fenomenología didáctica. Él señala en su libro *Didactical phenomenology of mathematical structures* (Freudenthal, 1983) que la esencia de la educación matemática está precisamente en el tratamiento de sus contenidos tomando en cuenta fenómenos sociales o naturales importantes para los estudiantes como parte de su formación integral básica. Los fenómenos pueden ser observados directamente por los participantes de un determinado curso, discutidos en clase y estudiados matemáticamente. Aquí, tal como lo hemos señalado anteriormente, entran a jugar un papel muy importante las diferentes formas del lenguaje, pasando desde el lenguaje coloquial a un lenguaje especializado expresado en procedimientos matemáticos de cierta complejidad. Uno trata de

seleccionar un problema para iniciar el trabajo didáctico, el cual debería estar relacionado con algún fenómeno social o natural.

Según nuestras investigaciones en relación con el uso de las aplicaciones y el proceso de modelación como estrategia didáctica (Mora, 1998), la mayor parte de los docentes suelen concebir esta tendencia didáctica como la forma de hacer uso de los conocimientos matemáticos, aprendidos durante momentos didácticos previos, para la solución de "ejercicios" intra o extramatemáticos. Esta visión de los docentes está directamente relacionada con la idea del concepto de aplicaciones presentado en la mayoría de los libros de texto. Muchas de las supuestas aplicaciones presentadas en los materiales instruccionales como medio de consolidación y profundización de los conocimientos matemáticos son altamente artificiales, hasta el punto de que los datos e informaciones contenidas en ellos son modificados, inventados o preparados, con la finalidad de que los estudiantes usen automática y mecánicamente tales conocimientos sin complicaciones o reflexión didáctica. No se trata de que una determinada actividad sea sencilla o complicada, sino que la situación didáctica sea lo más real posible y que refleje, según Freudenthal (1978 y 1983), un determinado fenómeno de interés para los estudiantes.

Frecuentemente nos encontramos con situaciones "de la vida cotidiana", las cuales son presentadas como ideales para el tratamiento de la educación matemática dentro de esta concepción didáctica; sin embargo, a pesar de que el contenido de la situación planteada por los docentes o los libros de texto se refiere a cosas de la realidad, lamentablemente esas situaciones no tienen mucho que ver con fenómenos propios de la realidad. Un ejemplo típico trabajado tanto en física como en matemática es el referido a dos vehículos automotores que parten desde dos puntos diferentes y se encuentran al cabo de cierto tiempo en un lugar determinado. Son muchas las preguntas que se hacen en el marco de este problema, las cuales encierran variados conocimientos matemáticos y físicos. Sin embargo, las condiciones e informaciones que acompañan al problema no son realistas, sino preparadas para que su tratamiento y solución no sean complicados. Estamos en presencia de las denominadas aplicaciones artificiales (De Lange, 1987; Nesher, 2000). Las situaciones realistas, con frecuencia, no suministran directamente datos precisos. Es necesario, desarrollar un proceso de indagación para conseguir las informaciones necesarias. En el modelo elaborado por Werner Blum (1985), este trabajo es conocido como proceso de idealización, el cual lleva a la elaboración del modelo real. Uno de los errores ampliamente cometidos dentro de esta concepción para la educación matemática está en iniciar el trabajo matemático en cualquiera de los momentos o fases que constituyen el esquema básico del proceso de modelación, olvidando su estructuración global y su conectividad (Mora, 2002).

Un ejemplo, trabajado con cierta frecuencia dentro de esta tendencia didáctica, se refiere a la introducción del concepto de volumen de un cilindro. Para ello se puede hacer la siguiente pregunta inicial: ¿Se podrá vaciar, en un cilindro vacío, todo el líquido contenido en un segundo cilindro, si ambos tienen diámetros y alturas diferentes? Como se puede observar la pregunta no puede ser respondida directamente, ya que la información no es suficiente. Hace falta, entonces, realizar una fase previa de discusión para poder replantear el problema con mayor precisión. La situación puede ser presentada, después de un proceso de reflexión, por lo menos de tres maneras diferentes: a) Se muestran dos figuras de cilindros a escala, uno con líquido y el otro vacío; b) Se hace un pequeño trabajo de experimentación con dos cilindros y c) Se suponen algunas condiciones particulares, las cuales pueden ser posteriormente generalizadas. Hay algunas actividades que pueden realizar los estudiantes, trabajando colectivamente: estimar, medir, experimentar, calcular, etc.

Para facilitar el trabajo con los estudiantes dentro de esta concepción didáctica se recomienda, por una parte, seguir alguno de los diversos modelos existentes en la respectiva literatura sobre el proceso de modelación matemática. El más conocido consiste en cuatro momentos (análisis de la situación real, elaboración del modelo real, construcción del modelo matemático y resultados matemáticos) y cinco fases (idealización, matematización, trabajo matemático, interpretación de los resultados y validación). En cada uno de los cuatro momentos interviene una forma de lenguaje, tal como se observa en la figura 4. En segundo lugar, se recomienda dentro de esta perspectiva didáctica, la elaboración de esquemas estructurales conceptuales, lo cual ayudará en la construcción de relaciones matemáticas tales como funciones o fórmulas que explican compactamente la situación real originalmente planteada.

4.5. Enseñanza de las matemáticas basada en proyectos

Desde el punto de vista de la pedagogía actual y de acuerdo con la exigencias, cada vez en aumento, de las sociedades dependientes inexorablemente de la tecnología, surge el trabajo por proyectos como un método necesario e indispensable de la enseñaza orientada en el trabajo y centrada en la acción de los estudiantes. La razón básica de esta concepción didáctica, tal como lo expresa ampliamente Paulo Freire (1973), es hacer que la enseñanza rompa con esa idea en la cual los estudiantes son, solamente, recipientes pasivos de información. Esta idea de la enseñanza concibe a los estudiantes como personas inquietas que pueden reflexionar sobre diferentes temáticas y desarrollar estrategias de solución para enfrentar situaciones problemáticas de cierta complejidad.

Podemos definir, de manera resumida, el método de proyectos como una búsqueda organizada de respuestas, por parte del trabajo cooperativo entre estudiantes, docentes, padres, especialistas, miembros de la comunidad extraescolar, etc., a un conjunto de interrogantes en torno a un problema o tema relevante desde el punto de vista social, individual y colectivo, el cual puede ser trabajado dentro o fuera de las aulas de clase. Las actividades de trabajo, determinadas y organizadas por la idea general del respectivo proyecto, son tan importantes como los resultados de las diferentes acciones o el producto obtenido al final del desarrollo de todas las fases del proyecto.

La idea del método de proyectos, tal como lo hemos señalado ampliamente en el trabajo titulado "El método de proyectos en educación matemática" (Mora, 2003g), desde el punto de vista didáctico y pedagógico está estrechamente relacionada con los trabajos de John Dewey y William Kilpatrick. Sin embargo, la bibliografía disponible nos señala que es Juan Enrique Pestalozzi quien ya en 1815 decía que la enseñanza debe estar basada en la acción y con ella el aprendizaje debe hacerse con la cabeza, el corazón y las manos. Este legado pedagógico también fue practicado por otro gran pedagogo, latinoamericano, Simón Rodríguez, también a principios del siglo XIX. John Dewey veía la enseñanza por proyectos como un elemento muy importante para contribuir con la socialización de las(os) niñas(os) y jóvenes en una sociedad democrática. Durante casi un siglo la enseñanza por proyectos ha tenido, en el ámbito internacional, avances y retrocesos, muy poca aplicación continuada y grandes perspectivas teóricas.

Los proyectos pueden ser incorporados durante el desenvolvimiento de la enseñanza normal en las instituciones escolares o también pueden ser planificados de tal manera que toda la institución participe durante una semana de proyectos libres como parte de las diferentes actividades que realizan los centros escolares. Como fuente de información para buscar una temática apropiada tenemos la vida cotidiana, las diferentes actividades en las cuales trabajan las personas, el medio ambiente, informaciones en revistas especializadas, bibliotecas, programas computacionales educativos, internet, opinión de especialistas, contenidos de otras asignaturas relacionados con las ciencias naturales y sociales, etc. Muchos autores señalan que los temas elegidos como proyectos de aula deben contener, en lo posible, aspectos de la vida cotidiana, los cuales están ricos en contenidos que afectan a todas las asignaturas.

A través de los proyectos los estudiantes pueden, de manera independiente, dedicarse durante cierto tiempo al trabajo educativo fuera o dentro del aula. Ellos eligen un tema en particular, deciden sobre las preguntas en torno a las cuales realizarán las actividades, así como la organización social de los participantes y la distribución del trabajo. Ellos buscan, con poca ayuda de los docentes, las informaciones necesarias y se preocupan tanto por la realización del proyecto como por la presentación y autoevaluación del mismo durante todas sus fases. En tal sentido, los objetivos fundamentales del método de proyectos podrían sintetizarse de la siguiente manera:

- El trabajo grupal independiente de temas generadores de aprendizaje dentro de la idea sobre proyectos, impulsa la capacidad de trabajar cooperativamente, tomar en cuenta seria y solidariamente a las(los) compañeras(os) de trabajo, la reflexión sobre actitudes egoístas propias de las sociedades altamente individualistas y la producción de resultados como producto de la acción colectiva.
- La unidad de temáticas particulares y el planteamiento de situaciones problemáticas hacen necesario la discusión crítica colectiva, donde se respeta la opinión de cada participante y se desarrollan métodos de trabajo compartidos, en contraposición a las afirmaciones deterministas y definitivas de los "expertos" que frecuentan las aulas de clases.
- El trabajo intensivo y la resolución de problemas impulsan el pensamiento complejo estructural de los estudiantes, lo cual se manifiesta en la elaboración de estrategias de solución que pueden ser aplicadas a otras situaciones similares.

- El aprendizaje y la enseñanza centrados en proyectos permiten que los participantes, a partir de diferentes perspectivas y basados en un proceso investigativo, encuentren respuestas adecuadas a la variedad de interrogantes que envuelven la temática objeto de estudio.

Se insiste en que los estudiantes deben ser el centro de la enseñanza, mientras que los docentes se constituyen, junto con otros participantes, en moderadores y facilitadores del proceso. Esto permite que el carácter dominante de los docentes, practicado normalmente en el método frontal de enseñanza, sea superado, dándole paso a la participación activa de los estudiantes. Este cambio de responsabilidades en el proceso de aprendizaje y enseñanza, facilita considerablemente la creatividad y la independencia de los participantes, logrando mayor motivación y alegría en los centros escolares.

Tal como lo hemos señalado detalladamente en otras oportunidades (Mora, 2003g) la estructuración del método de proyectos en los centros escolares influye considerablemente en el éxito como estrategia didáctica. Existen diferentes variaciones en cuanto a las fases que deberían conformar un proyecto. La mayor parte de los autores coinciden en señalar las siguientes como las más importantes (figura 7):

a) *Iniciativa del proyecto*. Con cierta frecuencia, las ideas e iniciativas que preceden el trabajo pedagógico mediante el método por proyectos surgen de los docentes. Sin embargo, algunos autores insisten en que la iniciativa debe provenir de los propios estudiantes. Otros incluyen también a los padres o demás miembros de la comunidad escolar y extra escolar como impulsores de temáticas que deben ser trabajadas como proyectos generadores. Lo importante es que los temas que se trabajarán, dentro de esta perspectiva, sean del interés de la mayor parte de los estudiantes y se relacionen con sus experiencias, lo cual podría motivarlos para el desarrollo exitoso de los aprendizajes.

b) *Discusión previa sobre el proyecto seleccionado*. Cada participante en un determinado proyecto debe tener la posibilidad de expresar su opinión o punto de vista en torno a las características del proyecto elegido para ser trabajado durante cierto tiempo. Cada cual debe estar consciente de su papel en el trabajo por proyectos, lo cual le permitirá aportar sus propias ideas, conocimientos y experiencias. Se trata de llegar a un acuerdo en cuanto a la planificación del trabajo y la observancia a un conjunto de reglas sociales necesarias para el buen éxito del trabajo con los proyectos. Se pretende la elaboración de un conjunto de ideas, tomando en cuenta las propuestas de cada participante, los recursos necesarios, estrategias de trabajo, etc.

c) *Desarrollo de un plan de acción conjunto*. A partir de la variedad de ideas y sugerencias aportadas por todos los participantes en la fase anterior, se pasa a la elaboración de un plan de trabajo realizable en el tiempo previsto. Aquí cada integrante debe suministrar sugerencias e iniciativas de acuerdo con sus posibilidades, disposición y potencialidades. Igualmente, es muy importante que todos los participantes asuman una conducta activa y tengan presente cuál será su papel en cada una de las actividades que conforman el respectivo proyecto. Los detalles del plan de trabajo tienen que ser publicados de tal manera que todas las personas involucradas directa o indirectamente en el proyecto tengan acceso inmediato a él. De la misma manera, el plan de trabajo debe ser lo suficientemente flexible de tal forma que los participantes puedan hacer modificaciones a algunas actividades de acuerdo con los acontecimientos y las circunstancias que se vayan presentado durante el desarrollo del trabajo conjunto.

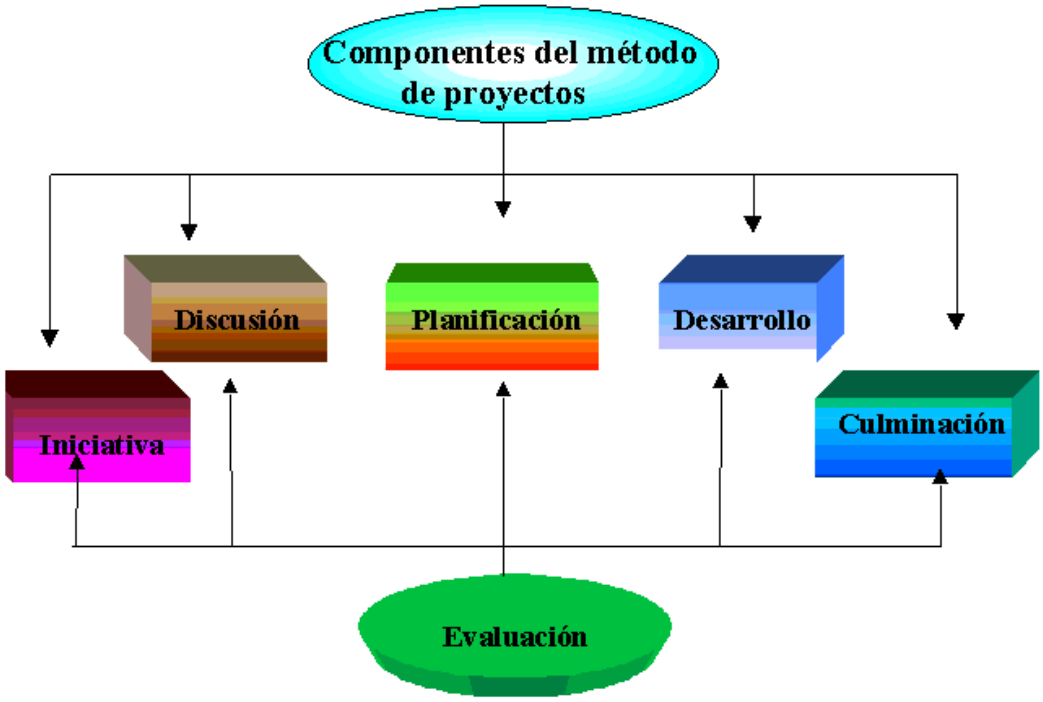
d) *Realización del proyecto*. Los participantes, previamente organizados e informados sobre las respectivas actividades planificadas en la fase anterior, pasan ahora a la ejecución detallada de cada aspecto del proyecto. En esta fase, obviamente, pueden hacerse cambios importantes al proyecto de acuerdo con las variables y problemáticas que vayan surgiendo, siempre que se mantengan los objetivos iniciales. El trabajo pedagógico por proyectos requiere de una forma de organización social estricta y coherente de todos los participantes. Ésta puede ser mediante el trabajo en parejas o grupos pequeños de 4 ó 5 personas. Por supuesto que algunos participantes se ofrecerán de manera individual para la realización de algunas tareas muy concretas, como por ejemplo hacer mediciones, entrevistas u observaciones en sus respectivas viviendas o comunidades. Estas informaciones deben ser compartidas y discutidas por los miembros del grupo al cual pertenece. Igualmente, cada grupo de trabajo se responsabilizará por la presentación de los resultados de su trabajo parcial ante todos los

miembros de la clase. De esta manera se podrán discutir con mayor profundidad los adelantos, inconvenientes y nuevas ideas surgidas de la realidad investigada.

e) *Culminación y presentación de resultados*. Los proyectos tienen normalmente dos orientaciones; por una parte, existen proyectos que están centrados en el proceso; mientras que en otros el objetivo fundamental es la obtención de un producto. En cada caso se debe tener en cuenta que los participantes hayan logrado satisfactoriamente los objetivos previstos con la realización del proyecto. Según el desarrollo del proyecto y los resultados del mismo, se debe hacer una presentación final al colectivo de la clase y, si el tiempo y las circunstancias lo permiten, desarrollar una discusión en cada caso. Las presentaciones parciales hechas durante la ejecución del proyecto ayudan grandemente a la preparación y presentación final de los resultados. Los docentes tienen que preparar adecuada y sistemáticamente aquellos contenidos específicos propios de las asignaturas integradas al proyecto como lenguaje, matemática, ciencias de la vida, etc. y consolidar tales contenidos, ya que el método de proyectos tiene la particularidad de que se descuidan, en muchos casos, algunos contenidos concretos de las áreas y el nivel respectivo.

f) *Evaluación del proyecto y de los aprendizajes*. Existe la tendencia entre algunos autores que se han dedicado a teorizar sobre el trabajo pedagógico mediante el método de proyectos de olvidar deliberadamente un aspecto muy importante en el campo de la didáctica y la pedagogía; es decir, se pretende desconocer el papel formador que cumple la evaluación también en concepciones progresistas de aprendizaje y enseñanza como el método por proyectos. La evaluación no debe restringirse exclusivamente a verificar la eficiencia de los proyectos al momento de sus presentaciones. Por el contrario, el método de proyectos, igual que la resolución de problemas y las aplicaciones, exige una evaluación formativa permanente, la cual es complementada con la presentación final de los resultados. La evaluación del trabajo enfocado en proyectos no debe quedar en manos solamente de los docentes, sino que deben participar también activamente los demás integrantes del proceso. La evaluación grupal, colectiva y la autoevaluación deben estar por encima de la evaluación individualizada tradicionalmente practicada en las instituciones escolares.

Figura 7. Componentes del método de proyectos



Para finalizar queremos resaltar que el método de proyectos viene siendo practicado con mucho énfasis en diferentes países. El mismo forma parte de las exigencias didácticas y pedagógicas de las diferentes reformas educativas impulsadas en el ámbito internacional, independientemente de los niveles de industrialización de cada nación. En el campo de las matemáticas existe una variedad muy importante de ejemplos de proyectos ya elaborados e, inclusive, validados en la práctica tanto en los tres ciclos o etapas de la escuela básica como en la educación secundaria (Mora, 2003g). La intención no es suministrarle a los docentes en ejercicio libros de texto con proyectos ya preparados para que ellos los pongan en práctica. Esto iría en contra de una buena parte de los objetivos de los proyectos, ya que se suprimirían algunas de las fases descritas anteriormente. Sí es importante, en todo caso, que los docentes obtengan tanto en su formación profesional en las instituciones pedagógicas universitarias como en su actualización permanente algunos ejemplos concretos los cuales podrían facilitarles el trabajo que implica cada una de las seis fases que deben caracterizar a los proyectos, tal como se muestra en la figura 7.

4.6. Enseñanza de las matemáticas tomando en cuenta el plan semanal, el trabajo libre y las estaciones de aprendizaje

4.6.1. El plan semanal en educación matemática

El plan semanal es una idea pedagógica y didáctica que proviene de la reforma pedagógica alemana, concretamente con los aportes de Peter Petersen (1884-1952) con su ampliamente conocido "Plan Jena". También se encuentran algunas ideas prácticas en los trabajos de Célestin Freinet en su concepción de la escuela de trabajo. La idea central del plan semanal es suministrarle a los estudiantes un panorama detallado de las actividades, matemáticas en nuestro caso, relacionadas con su trabajo a ser desarrollado durante una semana fuera o dentro de la institución escolar. Igualmente el plan semanal debe contener, como mínimo para una semana completa de trabajo escolar, un conjunto de tareas y actividades de aprendizaje, así como las respectivas indicaciones para la evaluación del proceso y el producto del aprendizaje y la enseñanza.

Los docentes preparan, a través de los planes de enseñanza para una determinada semana los objetivos y contenidos especiales establecidos en los respectivos planes generales de enseñanza y aprendizaje. De la misma forma elaboran un conjunto de actividades concretas para que los estudiantes organizados en alguna de las diferentes formas sociales de interacción didáctica puedan dedicarse al trabajo de aula de acuerdo con sus inquietudes e intereses particulares. Para que esta estrategia de aprendizaje y enseñanza tenga éxito es necesario que exista un acuerdo entre los estudiantes y sus docentes en cuanto al compromiso y la responsabilidad de trabajar adecuada, completa y coherentemente todas las actividades previstas en el plan semanal.

La estructuración y organización del trabajo deben ser discutidas entre todos los miembros de la clase, preferiblemente al finalizar la semana, lo cual les permitirá iniciar el día lunes con las respectivas actividades. Esta discusión permitirá aclarar los detalles pertinentes a los recursos, salidas de campo, juegos, ejercicios de consolidación, etc. previstos en el plan semanal. En algunos casos deberá existir acuerdo entre los equipos de trabajo, ya que no siempre los espacios y los recursos del aula pueden ser utilizados por todos los estudiantes simultáneamente. Es muy importante insistir en la necesidad de que todos los participantes de la clase, así como los padres y demás miembros de la institución escolar, estén enterados del plan semanal, ya que en muchos casos es necesaria la ayuda de estas personas para el cumplimiento efectivo de las actividades previstas.

Esta estrategia de trabajo no significa que los estudiantes realizarán todas las actividades simultáneamente o durante una tarde en sus casas con la ayuda de sus padres, lo cual les permitiría tiempo libre durante los demás días de la semana. No, el plan semanal estará estructurado por los docentes de tal forma que cada día los estudiantes tendrán sus respectivas actividades dentro y fuera del aula. Una de ellas es la permanente discusión con sus compañeros de curso y las correspondientes presentaciones a todo el colectivo de la clase, tal como lo señala Vaupel (1995) en su libro *El libro del plan semanal para la escuela secundaria*.

Las tareas y actividades de aprendizaje y enseñanza serán suministradas mayoritariamente por los docentes, en forma de hojas de trabajo, problemas o ejercicios provenientes de los libros de texto, tareas presentadas en la pizarra o dictadas por los docentes, material concreto, juegos, etc. Cada estudiante tiene en sus manos su respectivo plan y trabajará de manera individual, en grupos o en

parejas. El plan semanal permite el trabajo simultáneo de dos o más asignaturas, lo cual facilita considerablemente la enseñanza globalizadora y el tratamiento de temáticas generadoras de aprendizajes unificados. Los estudiantes trabajan de manera independiente y el docente se convierte en un consejero, orientador y facilitador del proceso.

Desde el inicio del trabajo escolar, y basados en los planes anuales, semestrales o trimestrales de enseñanza, reciben los(as) niños(as) y los jóvenes múltiples indicaciones sobre las actividades que realizarán durante un determinado período de tiempo. Esta estructuración del trabajo escolar puede ser elaborada también para una semana; es decir, planificar la enseñanza abierta de tal forma que los estudiantes trabajen independientemente durante cinco días, preferiblemente, en el marco de una misma temática. Es muy importante que los docentes suministren a los estudiantes materiales concretos, hojas de control, sugerencias para el desarrollo de las actividades, imágenes, etc. El trabajo independiente y activo en matemáticas no es posible desarrollarlo solamente con lápiz, papel, tiza y pizarra. Estos recursos tradicionales son importantes, pero insuficientes.

La organización del trabajo matemático en las aulas o fuera de ellas a través del plan semanal también requiere tiempo, dedicación y preparación por parte de los docentes en cualquier nivel del sistema educativo donde se ponga en práctica esta estrategia didáctica. Hasta el presente hay bastante información y ejemplos, muchos de ellos ya validados, para los dos primeros ciclos de la escuela básica. Se observa, además, un aumento muy importante de inquietudes y trabajos en la escuela secundaria.

4.6.2. El trabajo libre en educación matemática

El trabajo libre no es una novedad pedagógica o una moda didáctica que se ha impuesto en los últimos veinte años en algunos países. En las fuentes bibliográficas se encuentran antecedentes muy importantes sobre el trabajo libre, especialmente en la denominada enseñanza inicial y en las dos primeras etapas (ciclos) de la educación básica. Pedagogos como Juan Pestalozzi, Simón Rodríguez, Célestin Freinet, María Montessori, Peter Petersen, Luis Beltrán Prieto Figueroa, entre muchos otros, han propuesto la organización de la enseñanza dentro de una perspectiva libre y activa (Jürgens, 1994). Se considera, desde el punto de vista pedagógico, que los niños deben libremente hacerse preguntas, plantearse problemas y buscar los medios y recursos para resolverlos cooperativamente con sus compañeras(os) y docentes. Este objetivo es muy ambicioso y exigente, y su logro será posible siempre que se planifiquen actividades coherentes y sistemáticamente bien organizadas según las características del grupo. Los estudiantes buscan y escogen, por su propia cuenta, problemas previamente seleccionados y propuestos por los docentes, y se organizan libremente en búsqueda de las respectivas soluciones. Sin embargo, es muy importante tener presente que ellos necesitan, desde el punto de vista pedagógico, tanto la ayuda de los docentes como los materiales indispensables para desarrollar las respectivas actividades.

El trabajo libre en matemáticas y demás áreas, tanto de la escuela básica, como de la educación secundaria, significa llevar la pedagogía progresista a la práctica escolar y concebir la educación a partir de las(os) niñas(os) y jóvenes y no en función de los intereses de los adultos, especialmente de los promotores de una determinada educación, en la mayoría de los casos opresora y muy poco liberadora (Freire, 1973). En este tipo de trabajo escolar los estudiantes, de todos los niveles, reciben una variedad de actividades y recursos didácticos, con los cuales libremente pueden aprender contenidos específicos interconectados entre sí a través de las diferentes ramificaciones que componen cada área de aprendizaje. De esta manera los estudiantes pueden buscar y encontrar, de acuerdo con sus experiencias personales y colectivas, intereses particulares y capacidades individuales, sus propios mecanismos de aprendizaje, tal como lo señala Potthoff (1992) en su trabajo *Principios y práctica del trabajo libre*. Para ello es necesario que los docentes y especialmente las instituciones escolares garanticen los ambientes de trabajo la variedad de métodos y estrategias de aprendizaje y un amplio espectro de posibilidades de aprendizaje en las aulas de clase.

El aprendizaje tiene lugar, realmente, a través de un proceso activo, creativo, participativo y contextualizado. Los estudiantes trabajan libremente a partir de un conjunto de actividades previamente concebidas, y determinan el ritmo, los métodos, las formas y las estrategias más apropiadas para resolver las situaciones problemáticas en torno a las cuales se desarrolla el aprendizaje y la enseñanza. Los estudiantes deciden, en función de las actividades propuestas, qué hacer, cómo y cuándo hacerlo. Ellos se convierten en los dueños del proceso. Igualmente el control y

la evaluación de los resultados del trabajo lo asumen los estudiantes, siempre con la ayuda de los docentes, de manera independiente y autocrítica.

En el caso de las matemáticas, en vez de que los estudiantes dediquen grandes cantidades de tiempo a la elaboración de ejercicios con muy poco sentido y significado para su formación integral y general, deberían construir o encontrar, durante un largo proceso de trabajo activo, reglas, procedimientos, leyes, estrategias de solución de problemas; así como reconocer los posibles errores y las formas de solventarlos. Quizás el elemento central del trabajo libre consiste en disponer de tiempo para profundizar, reflexionar, indagar, imaginar y soñar las matemáticas.

Mediante esta estrategia de aprendizaje y enseñanza, los estudiantes aprenden a organizar su proceso de trabajo escolar y, especialmente, el desarrollo de estrategias personales para la resolución de problemas y ejercitación matemáticas. De la misma manera aprenden a seleccionar materiales, disentir entre diferentes métodos para trabajar eficientemente las respectivas actividades y elegir aquellos problemas útiles e interesantes. En ell caso de problemas complejos y abiertos, los estudiantes aprenden, con la ayuda del trabajo libre, a planificar procesos también complejos de solución y a conseguir por su propia cuenta más información y mecanismos de solución. De esta manera aprenden, además, a desarrollar una alta responsabilidad por su propio aprendizaje, ya que el trabajo libre exige la toma de decisiones acertadas, organizar planes de acción inmediatos y cumplir con tareas especificas previstas (Potthoff, 1992).

Para finalizar, debemos resaltar que el trabajo de los alumnos, en general, es libre en el sentido estricto de la palabra solamente en algunas dimensiones, tal como lo hemos expuesto anteriormente. No se trata, al igual que muchas estrategias didácticas como la resolución de problemas por ejemplo, de concebir la enseñanza, y en particular la educación matemática, de una manera totalmente caótica y desordenada. Los docentes siguen cumpliendo un papel básico en las instituciones escolares. Ellos continuarán jugando un papel predominante, ya que dominan los conocimientos específicos que sus estudiantes deberán aprender y manejan los métodos y las estrategias didácticas, saben cuál debe ser el objetivo de la educación y tienen las experiencias suficientes para administrar adecuada y eficientemente todo el proceso educativo dentro y fuera de las instituciones escolares. Más trabajo por parte de los estudiantes y más espacio y tiempo libre para la realización de las actividades no significan que debamos desistir de la planificación, las instrucciones para el desarrollo de las actividades y la evaluación del proceso y producto del aprendizaje matemático. Por el contrario, el trabajo libre exige reglas claras y acuerdos concretos entre los participantes; exige también iniciativas e indicaciones precisas por parte de los docentes. El trabajo libre está, en consecuencia, relacionado con muchas de las otras estrategias didácticas expuestas en el presente trabajo, pero él se relaciona más directamente con el *plan semanal* y con el*aprendizaje en estaciones*, el cual expondremos a continuación.

4.6.3. Las estaciones de trabajo en educación matemática

El aprendizaje, no solamente de las matemáticas, basado en las denominadas *estaciones de trabajo* forma parte de la concepción didáctica y pedagógica conocida, ya desde los tiempos de las grandes reformas pedagógicas, como "*aprendizaje y enseñanza abierta*". A esta concepción pertenece, entre otras estrategias didácticas, el plan semanal, el trabajo libre y las estaciones, aunque existen algunos autores quienes consideran que las estaciones de trabajo son una forma del trabajo libre descrito en 4.6.2. Desde el punto de vista teórico, el trabajo en estaciones, encuentra sus fundamentos en los mismos pedagogos y principios descritos en relación con el plan semanal y el trabajo libre. Aquí tomaremos en cuenta los aportes de los siguientes autores: Potthoff y Potthoff (1995) y Krebs y Faust-Siehl (1993).

El trabajo en estaciones no debe perder de vista los principios de Pestalozzi o Simón Rodríguez, por ejemplo, en el sentido de que el aprendizaje y la enseñanza deben estar basados en el trabajo con todos los sentidos. Las actividades tienen que ser desarrolladas por los estudiantes, individualmente, en parejas o grupos, de manera independiente y autónoma, al igual que en las otras estrategias de aprendizaje descritas anteriormente.

Los estudiantes reciben un conjunto de estaciones, las cuales contienen cada una de ellas una o más actividades que han de ser trabajadas durante cierto tiempo. Se recomienda que todas las estaciones, y en consecuencia las respectivas actividades, correspondan a un determinado tema y estén

conectadas entre sí. Las estaciones de aprendizaje pueden ser trabajadas en el aula de clases, en los espacios libres de los centros educativos o fuera de la institución escolar.

Algunos autores consideran que se han logrado los objetivos inicialmente previstos con esta estrategia didáctica solamente cuando los estudiantes han culminado todas las estaciones planificadas para un determinado tema. Esta opinión es rebatida por quienes piensan que las estaciones de trabajo no necesariamente tienen que seguir una secuencia de E_1 hasta E_n y que todas tienen que ser trabajadas por todos los estudiantes. Por el contrario, las estaciones de trabajo facilitan considerablemente la diferenciación interna en matemáticas (Mora, 2003f), ya que los estudiantes pueden decidir, de acuerdo con sus intereses, inquietudes y facultades, cuáles y cuántas estaciones hacer. Además, ellos pueden iniciar el trabajo en cualquiera de las estaciones presentadas por los docentes. En este sentido, el principio se asemeja mucho al trabajo libre o plan semanal. En los tres casos descritos los estudiantes tienen amplia libertad de decisión y acción.

Una forma particular del aprendizaje en estaciones es el *aprendizaje circular*. Este consiste en un conjunto de estaciones distribuidas en forma de círculo, las cuales deben ser trabajadas una o más veces por los estudiantes, de acuerdo con las actividades contenidas en cada estación. Este tipo de trabajo didáctico es similar al trabajo en forma de *espiral*, propio de la investigación acción. El trabajo didáctico en estaciones se impone cada vez más en las instituciones escolares, ya que él garantiza, en cierta forma, la tranquilidad y el orden en las aulas de clase, lo cual no ocurre con el trabajo libre. Algunas de las principales características del aprendizaje y la enseñanza basada en estaciones de trabajo son las siguientes:

a. Posibilitan el trabajo activo, participativo y cooperativo de todos los estudiantes.
b. Las estaciones tienen que tratar en lo posible diferentes aspectos sobre un tema en particular.
c. Los estudiantes recibirán un conjunto de instrucciones para cada estación, lo cual les facilitará el trabajo autónomo e independiente.
d. Las actividades, expuestas en cada estación, tienen que ser lo suficientemente claras, precisas y realizables; de lo contrario los estudiantes no sabrán realmente cómo deben resolver las situaciones problemáticas propuestas.
e. Las estaciones llevan a los estudiantes hacia la solución de distintos problemas, cuyo propósito debería estar vinculado con los objetivos básicos de la educación matemática escolar.

El trabajo con estaciones tiene la gran ventaja de poder vincular la enseñanza de las matemáticas con otras estrategias didácticas como, por ejemplo, la enseñanza por proyectos, los juegos, la experimentación matemática, las aplicaciones y su proceso de modelación matemática y la resolución de problemas. La enseñanza por estaciones no es solamente una estrategia adecuada para los primeros grados de la escuela básica. Esta idea didáctica también puede ser aplicada en otros niveles del sistema educativo, incluso en las universidades. Un ejemplo para el 7º u 8º grado de la escuela básica podría ser la introducción del concepto de función y proporcionalidad mediante ocho a diez estaciones de trabajo experimental. Aquí se podría pensar en el tamaño y/o peso de las gotas de agua, el grosor de hojas de papel o láminas de hierro, el peso de tornillos o clavos de diferentes tamaños, el peso de pedazos de cable según su longitud, relación entre área y peso, cambio de tamaño de las velas encendidas, crecimiento de algunas plantas, etc.

4.7. Enseñanza de las matemáticas con la ayuda de la computadora y los correspondientes programas

Actualmente se ha extendido tanto el uso de la computadora por muchas partes del mundo, en el desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza, y en particular de las matemáticas, que sería imposible describir en breves líneas la multiplicidad de aspectos relacionados con esta temática. Trataremos solamente de señalar algunos elementos que caracterizan la influencia de la informática, más concretamente de la computadora, en el campo de la educación matemática. Hay muchos autores, en diferentes lenguas, quienes se ocupan tanto de la reflexión teórica como de diferentes trabajos de investigación empíricos con la finalidad de optimizar y fortalecer su uso durante el trabajo cotidiano en las diferentes instituciones escolares.

Hace aproximadamente treinta años aparecen en el mercado las primeras computadoras, las cuales podían ser adquiridas por particulares a precios sumamente elevados. Estos equipos estaban

diseñados de tal manera que podían ser programados mediante el denominado lenguaje de máquina. Los institutos de investigación, particularmente las universidades, ya disponían de este importante recurso tecnológico. Algunos centros de investigación trabajaban rápidamente con la finalidad de impulsar su eficiencia, eficacia y venta masiva, como en efecto ocurrió unos pocos años después (Fauser y Schreiber, 1989; Metz-Göckel, 1991; Sinhart-Pallin, 1990). Con esas primeras máquinas personales ya se podían ejecutar algunos procedimientos de aproximación matemática, inclusive en la enseñanza de esta especialidad en aquellas instituciones donde se disponía de tales recursos. Poco después surgen algunos lenguajes de programación, bien conocidos ya desde hace mucho tiempo, como "Basic" y "Pascal".

A pesar de este acelerado desarrollo no se logró implementar con mayor fuerza y efectividad la computadora en las instituciones escolares, y especialmente en la educación matemática, sino hasta inicios de los años noventa. Es durante esta década cuando se experimenta un salto cualitativo y cuantitativo en el uso de las computadoras personales. Empezaron a aparecer en el mercado equipos completos con un alto rendimiento y capaces de ejecutar programas de diferente naturaleza, especialmente los procesadores de texto (Hoelscher, 1994; Hentig, 2002). A finales del siglo pasado los ministerios de educación de los países industrializados inician una campaña a favor de la implementación masiva de la computadora como medio para el aprendizaje y la enseñanza en todos los niveles del sistema educativo, inclusive en los primeros grados de la escuela básica. Estas acciones, muy lamentablemente, no se han puesto en práctica aún en nuestros países latinoamericanos a pesar de las exigencias sociales, científicas y tecnológicas actuales. La mayor parte de las instituciones de educación superior no disponen de laboratorios o centros de computación y los centros educativos de educación básica y media aún no disponen de este recurso básico y fundamental para el desarrollo de una educación actualizada, moderna y tecnológicamente significativa. A esta carencia se suman las dificultades relacionadas con la formación, preparación y actualización permanente de los docentes en este campo.

Los primeros programas implementados en las instituciones de educación superior y educación media diversificada y profesional estuvieron relacionados con la solución de problemas de análisis y álgebra lineal. Este avance tecnológico trajo como consecuencia el replanteamiento de las actividades de enseñanza, los problemas y ejercicios trabajados, especialmente en los últimos años del bachillerato y en los primeros semestres de los estudios universitarios. Igualmente ocurren cambios importantes en el tratamiento de las matemáticas escolares correspondientes al tercer ciclo o tercera etapa de la educación básica. Éstos se ponen de manifiesto, particularmente, a través de los programas diseñados para el aprendizaje y la enseñanza de la geometría. Surge entonces una nueva concepción para el trabajo de esta importante área de las matemáticas, olvidada a raíz de la implementación de la denominada "matemática moderna". Es en geometría donde, probablemente, se ha avanzado más en cuanto a los programas de computación para las matemáticas escolares. Con su ayuda, no solamente se pueden hacer construcciones geométricas muy precisas y altamente sofisticadas, sino desarrollar con mayor facilidad algunas demostraciones de las proposiciones clásicas de la geometría. Tales programas, por su estructura dinámica, contribuyen efectivamente con el deseado aprendizaje motivador e independiente de los estudiantes. De la misma manera, a través de la aplicación de estos programas se podría alcanzar un objetivo, aún muy lejos de la educación matemática, como es el denominado aprendizaje por descubrimiento, tal como lo propone Jerónimo Bruner (1980).

Actualmente conocemos programas con una capacidad enorme para resolver analítica y gráficamente la mayor parte de las tareas trabajadas en las clases de matemática desde los primeros grados hasta la educación superior. Este alto rendimiento ha hecho que se pierda el interés por la programación en las instituciones escolares, tal como ocurrió en la década de los ochenta e inicio de los noventa. Lo importante, en cuanto a la aplicación de estos programas en la enseñanza de las matemáticas, es su adecuada y eficiente utilización para la comprensión de los conceptos matemáticos. El objetivo único de encontrar una solución mediante la aplicación de un algoritmo no es interesante ni importante actualmente. La idea es utilizar estos programas con la finalidad de visualizar con mayor precisión y comodidad las construcciones matemáticas, no solamente en geometría, comprender con mayor facilidad y motivación algunas fases de la construcción de estructuras matemáticas y demostraciones, implementar estrategias heurísticas en la resolución de problemas y fomentar la independencia y creatividad de los estudiantes.

El número y la diversidad de programas crecen tan aceleradamente que es muy difícil estar actualizado y hacer uso de buena parte de ellos. Existen programas a la disposición de los docentes y estudiantes en todas las lenguas y para todos los niveles. La fuente primordial para la adquisición de

estos programas es precisamente internet, otro aporte "informático" importante del ser humano para el desarrollo de la educación matemática (Hentig, 2002). Veremos no muy lejos la presentación de largos conceptos matemáticos de manera dinámica en nuestros monitores, sin necesidad de activar ningún tipo de programa o conocer su funcionamiento. Nos encontramos en presencia de un adelanto exponencial de esta tecnología, lo cual podría convertirse, administrado correctamente, en un poderoso recurso para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

El aspecto central y decisorio en cuanto al aprendizaje con la ayuda de la computadora radica, definitivamente, en una adecuada interacción entre los programas seleccionados, el papel de los docentes, las acciones de los estudiantes y las actividades concretas de aprendizaje. Actualmente nos encontramos con numerosas ofertas de programas que posibilitan excelentes interacciones entre estos cuatro elementos; tal adelanto técnico y didáctico no debe, por ninguna circunstancia, llegar a sustituir la presencia activa y formadora de los docentes. Son ellos en quienes recae con mayor peso la responsabilidad pedagógica y didáctica, ya que no puede concebirse una sociedad integralmente "educada" sin su presencia formadora. Los conocimientos técnicos y especiales podrán ser adquiridos por los estudiantes con la ayuda de la tecnología de manera autodidáctica, pero la formación critica y liberadora solamente será posible con la interacción y discusión entre quienes participan en el complejo proceso de aprendizaje, enseñanza y liberación.

Por otra parte, las expectativas que ha generado el uso de la computadora en las instituciones escolares no siempre se corresponden con la realidad. Se han desarrollado y propagado, sobre todo por los intereses del mercado, muchos programas que aparentemente facilitan el aprendizaje de las matemáticas u otras áreas de estudio; sin embargo ellos no han logrado fortalecerse como salidas alternas a las dificultades que presentan los estudiantes con algunos contenidos específicos. El fracaso de estos intentos radica en que se sigue considerando que el ser humano aprende, tal como lo señalaba Skinner (1953), de manera individualizada, mecánica, algorítmica y programada, para lo cual no hace falta relacionarse con los demás seres humanos. Afortunadamente esta concepción del uso del computador ya ha sido advertida y cuestionada en el momento oportuno. Ahora, consideramos que esta herramienta tecnología es solo un recurso importante complementario, como podría ser la calculadora de bolsillo, científica o programable, para el aprendizaje y la enseñanza. Podríamos decir, finalmente, que la computadora se ha convertido en un recurso o medio indispensable para el adecuado desarrollo del proceso de aprendizaje y enseñanza de todas las asignaturas, particularmente de la matemática. Ella, sin embargo, no debería sustituir, por ningún motivo, la presencia y el papel fundamental que juegan los docentes.

5. Conclusiones

Tal como lo hemos señalado, tanto en el presente trabajo como en otras oportunidades, la educación matemática se encuentra actualmente en un interesante proceso de reflexión y transformación. Cada vez más aumenta el número de personas, vinculadas con las matemáticas, la psicologia o la pedagogía, quienes se preocupan por muchos aspectos sobre el aprendizaje y la enseñanza de esta disciplina. Sin embargo, observamos que la práctica de aula, a pesar de la variedad de ideas teóricas, aún está sujeta a los principios tradicionalmente combatidos por la didáctica crítica y progresista. También se percibe muy poca investigación didáctica en las diferentes instituciones educativas desde los grados iniciales hasta la formación de docentes en los centros de educación superior (Mora, 1998 y 2003i).

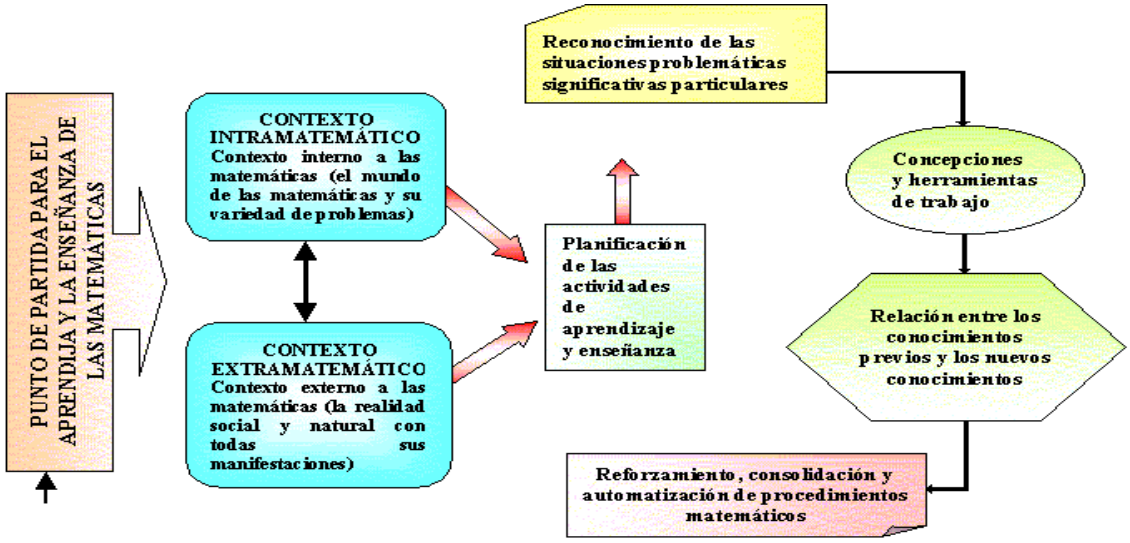
Uno de nuestros propósitos es impulsar el desarrollo, implementación y evaluación de unidades de enseñanza, en los diferentes niveles del sistema educativo, que permitan poner en práctica, definitivamente, esta gran variedad de principios teóricos expuestos reiteradamente por muchos didactas de las matemáticas escolares. En la figura 8 se sintetizan muchas de estas ideas, con base en las cuales, y siguiendo a autores como Blum (1985), Skovsmose (1994), Bishop (1988), Freudentahl (1985), etc., podemos establecer que la educación matemática escolar debe ser enfocada desde dos puntos de vista: a) relacionada con el contexto intramatemático y b) relacionada con el contexto extramatemático. Una de las profesoras que ha trabajado ampliamente sobre esta concepción didáctica, especialmente para los cuatro primeros grados de la escuela básica, es Marianne Franke (1996 y 1997), quien, basada en muchos de los autores citados, ha elaborado un esquema conceptual similar al de la figura 8. El mismo tiene semejanza con el esquema que simplifica el concepto sobre *las aplicaciones y su proceso de modelación matemática* que hemos explicado reiteradamente en otras oportunidades (Mora, 2002).

El tratamiento de las actividades de trabajo fuera o dentro del aula, partiendo de contextos intra o extramatemáticos, tiene que ver con una filosofía didáctica ampliamente exigente, la cual presupone estrategias de aprendizaje y enseñanza novedosas, activas y problematizadoras, tales como: resolución de problemas, aplicaciones, modelación, proyectos, experimentación matemática, demostración en matemáticas escolares, juegos, relación con otras asignaturas, historia, ideas fundamentales, estaciones de aprendizaje, etnomatemática, etc. Se pueden poner en práctica en los diferentes niveles del sistema educativo, combinando estas estrategias didácticas entre sí, lo cual dependerá también de otros factores como la cantidad de estudiantes en el curso, los recursos disponibles, los contenidos matemáticos que serán trabajados, el grado o año escolar, los intereses predominantes en el curso, etc. Lo importante de una educación matemática dentro de esta perspectiva radica, precisamente, en el rompimiento frontal y definitivo con la visión didáctica puramente algorítmica, centrada en el docente y descontextualizada.

Si iniciamos el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas a partir de un contexto extramatemático, tal como lo señala Franke (1997), debemos pensar en el planteamiento de situaciones problemáticas de cierta complejidad, en las cuales los estudiantes trabajarán durante cierto tiempo y con diferentes estrategias didácticas como los proyectos o las aplicaciones. Las fases de trabajo que constituyen la temática tratada tocan la complejidad de la vida cotidiana de los(as) niños(as) y permiten el desarrollo de una diversidad de contenidos matemáticos y extramatemáticos, especialmente de las otras áreas como la lengua, las ciencias naturales, etc. De esta manera los estudiantes pueden adquirir, además de los conocimientos específicos, métodos de trabajo, relación y unidad de conocimientos y dominio de procedimientos para la solución de problemas complejos que pueden presentarse con frecuencia en la vida. Los contenidos matemáticos cumplen el papel fundamental, en este caso, de explicar fenómenos y enlazar conceptos de diferentes disciplinas científicas. Muchos de los temas generadores de aprendizaje son tomados de la vida cotidiana o de las demás áreas que componen los planes de enseñanza.

Para cada temática generadora, los docentes pueden, con la ayuda de los libros de texto y la discusión didáctica con sus colegas, buscar la manera de trabajar y sistematizar los respectivos contenidos matemáticos específicos, presentados normalmente en los planes de estudio. Mediante el uso de situaciones contextuales provenientes de la vida y experiencias de los estudiantes, se puede fomentar una conciencia crítica sobre diversos problemas que afectan cotidianamente a la población. Las ideas, los procedimientos y recursos matemáticos, desde los primeros grados de la escuela básica hasta los primeros semestres en las universidades, permiten el establecimiento de métodos metacognitivos para la resolución de problemas dentro y fuera de las matemáticas. Existe una diversidad muy grande de situaciones provenientes de la vida real, las cuales contienen innumerables contenidos y conceptos matemáticos. Si se toma, por ejemplo, como tema generador el hábitat donde está ubicada la vivienda y/o la escuela de los(as) niños(as), los docentes, inclusive de diferentes áreas, pueden desarrollar un conjunto de actividades de aprendizaje y enseñanza, aplicando algunas de las estrategias didácticas expuestas en el presente trabajo. Este tema generador permite el desarrollo de una conciencia crítica sobre los riesgos, problemas, ventajas, sitios de diversión, etc. que afectan positiva o negativamente el hábitat de vida y estudio de los estudiantes. La variedad de ideas matemáticas es muy amplia y pueden trabajarse ideas matemáticas fundamentales tales como medir, contar, jugar, diseñar, etc. así como lo señalan detallada y ampliamente Steen (1998) y Bishop (1988 y 1999).

Figura 8. Visión sintética de una educación matemática holística y crítica



ESTRATEGIAS DIDÁCTICAS:

- Solución de problemas,
- Proyectos,
- Aplicaciones,
- Modelación,
- Experimentación,
- Demostración.
- Juegos,
- Otras asignaturas,
- Historia,
- Ideas fundamentales,
- Estaciones de trabajo,
- Etnomatemática.

En la figura 8 tenemos también, según Franke (1996 y 1997), una segunda posibilidad para iniciar el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Se trata del contexto interno a la matemática, el mundo de las matemáticas, para muchos autores descontextualizado pero significativo. La concepción sobre resolución de problemas internos a las matemáticas, juega aquí un papel muy importante. Los jóvenes y los(as) niños(as) tanto en la escuela básica como en la educación secundaria pueden disfrutar, entretenerse, interesarse y trabajar activamente alrededor de situaciones internas a las matemáticas, siempre que ellas sean significativamente importantes e interesantes para los estudiantes. Pareciera que ésta es la tendencia predominante en nuestros sistemas educativos; sin embargo, la calidad de los contenidos matemáticos trabajados en las instituciones escolares dista mucho de la esencia misma de las matemáticas. Aquí también se requieren cambios profundos y radicales. Los estudiantes de cualquier nivel pueden disfrutar mucho de las operaciones, cálculos y resolución de problemas matemáticos, sin que éstos estén necesariamente vinculados con distancias concretas, animales, cosas, etc. El descubrimiento de estructuras, equivalencias, relaciones matemáticas, etc. pueden motivar y aumentar el interés por las matemáticas.

En la figura 8 observamos que, desde un punto de vista amplio y equivalente para cada estrategia didáctica, el trabajo matemático comprende realmente seis fases fundamentales: punto de partida, el cual puede ser el contexto extra o intramatemático; preparación de las actividades de aprendizaje y enseñanza a partir de la problemática originalmente planteada; reconocimiento de los problemas específicos de acuerdo con cada una de las situaciones problemáticas; aplicación y desarrollo de conceptos y herramientas matemáticas para la resolución de los problemas particulares;

establecimiento de la relación entre los conocimientos formales o intuitivos previos de los estudiantes y los nuevos conocimientos, los cuales serán sistematizados cuidadosamente por los docentes y, finalmente, la fase de reforzamiento, consolidación y automatización de los conocimientos matemáticos adquiridos, la cual se logrará mediante el tratamiento de situaciones problemáticas similares a la presentada como temática generadora.

Referencias bibliográficas

1.Abreu, G. de (2000). El papel del contexto en la resolución de problemas matemáticos. En: Gorgorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 137-150). Barcelona (España): Graó. [Links]

2.Anigues, R. y Zerbato-Poudou, M.-T. (1999). *Las prácticas escolares de aprendizaje y evaluación*. México: Fondo de Cultura Económica. [Links]

3.Arnold, R. y Pätzold, H. (2002). *Schulpädagogik Kompakt*. Berlín: Cornelsen. [Links]

4.Baruk, S. (1989). *Wie alt ist der Kapitän? Über den Irrtum in der Mathematik*. Basel: Birkhäuser. [Links]

5.Bauersfeld, H., Krummheuer, G. y Voigt, J. (1988). Interactional theory of learning and teaching mathematics and related microethnographical studies. En: Steiner, H. G. y Vermandel, A. (Eds.).*Foundations and Methodology of the Discipline Mathematics Education (Didactics of Mathematics)*(pp. 174-168). Antwerp: Proceedings of the 2nd TME-Conference. University of Antwerp. [Links]

6.Beyer, W. (1994). El discurso y el lenguaje matemáticos en el contexto del aula. Trabajo de grado de maestría no publicado. Caracas: Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico de Caracas. [Links]

7.Bishop, A. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer. [Links]

8.Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: La educación matemática desde una perspectiva cultural.* Barcelona (España): Paidós Ibérica. [Links]

9.Bishop, A. (2000). Enseñanza de las matemáticas. ¿Cómo beneficiar a todos los alumnos? En: Gorgorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 35-56). Barcelona (España): Graó. [Links]

10.Blum, W. (1985). Awendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion.*Mathematische Semesterberichte,*32: 195-232. [Links]

11.Bruner, J. S. (1980). *Der Prozess der Erziehung*. Berlín: Berlin. [Links]

12.Camilloni de, A. (Ed.) (1997). *Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza*. Barcelona (España): Gedisa. [Links]

13.Clements, K. (2000). Matemáticas en la escuela: cuestiones de equidad y justicia. En: Gorgorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 57-78). Barcelona (España): Graó. [Links]

14.Chomsky, N. (1986). *El lenguaje y el entendimiento*. Barcelona (España): Seix Barral. [Links]

15.Da Ponte, J., Brunheira, L., Abrantes, P., y Bastos, R. (1998). *Projetos Educativos: matemática - ensino secundário*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação. [Links]

16.Damerow, P. (Ed.). (1986). *Mathematics for all. Problems of cultural selectivity and unequal distribution of mathematical education and future perspectives on mathematics teaching for the majority*. París: UNESCO. [Links]

17.Davis, P. y Hersh, R. (1986). *Erfahrung Mathematik*. Berlín: Birkhäuser. [Links]

18.Dewey, J. (1998). *Democracia y educación*. Madrid: Morata. [Links]

19.Dreyfus, T. (2000). La demostración como contenido a lo largo del curriculum. En: Gorgorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 125-134). Barcelona (España): Graó. [Links]

20.Ernest, P. (Ed.). (1994) *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective*. Brighton: Falmer. [Links]

21.Fernández, J. y Rodríguez, M. (1997). *Juegos y Pasatiempos para la enseñanza de la matemática elemental*. Madrid: Síntesis. [Links]

22.Fraedrich, A. M. (2001). *Planung von Mathematikunterricht in der Grundschule. Aus der Praxis für die Praxis*. Heidelberg – Berlín: Spektrum Akademischer. [Links]

23.Franke, M. (1996). Offener Mathematikunterricht in einer altersgemischten Gruppe. En: *GSZ*104/1997, 15 -18. [Links]

24.Franke, M. (1997). Sonnenuhren ticken nicht. *GSZ* 92/1996, 42 - 45. [Links]

25.Freinet, C. (1996). *La escuela moderna francesa. Una pedagogía moderna de sentido común. Las invariantes pedagógicas.* Madrid: Morata. [Links]

26.Freire, P. (1973). *Pedagogía del oprimido. Educación como práctica de la libertad*. Buenos Aires: Siglo Veintiuno. [Links]

27.Freire, P. (1997). *Pedagogía de la autonomía*. Madrid: Siglo XXI. [Links]

28.Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft von Mathematikunterricht*. München: Oldenburg. [Links]

29.Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer. [Links]

30.García, J. y Mora, D. (2003). Aplicaciones y su proceso de modelación matemática. Manuscrito. Caracas: Universidad Central de Venezuela. [Links]

31.Gimeno, J. (1998). *El curriculum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Morata. [Links]

32.Glasersfeld, E. von (1991). *Radical Constructivism in Mathematics Education*. Dordrecht:Kluwer. [Links]

33.Gómez-Granell, C. y Fraile, J. (1993). Psicología y Didáctica de las matemáticas. *Infancia y Aprendizaje.* 62/63: 101-113. [Links]

34.Gorgorió, N. y Bishop, A. (2000). Implicaciones para el cambio. En: Gorgorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*(pp. 189-212). Barcelona (España): Graó. [Links]

35.Gorgorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (Coords.). (2000). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional*. Barcelona (España): Graó. [Links]

36.Guzmán, M. de (1993). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. (En línea). Disponible : http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm. [Links]

37.Hentig, H. von (2002). *Der technischen Zivilisation gewachsen bleiben*. Weinheim y Basel: Beltz. [Links]

38.Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim y Basel: Beltz. [Links]

39.Hoelscher, G. (1994). *Kind und Computer, spielen und lernen am PC*. Berlín – Heidelberg: Springer. [Links]

40.Jürgens, E. (Ed.) (1994). *Erprobte Wochenplan- und Freiarbeit-Ideen in der Sekundarstufe I*. Heinsberg: Agentur Dieck. [Links]

41.Keitel, C. (Ed). (1989) *Mathematics, Education and Society*. París: UNESCO, Division of Science, Technical and Environmental Education. [Links]

42.Kilpatrick, J. (1992). Historia de la investigación en educación matemática. En: Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra, M. *Educación matemática e investigación.* Madrid: Síntesis. [Links]

43.Kline, M. (1985). *Matemáticas, la pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI. [Links]

44.Krebs, H. y Faust-Siehl, G. (Ed.). (1993). *Lernzirkel im Unterricht der Grundschule*. Freiburg: Reformpädagogischer. [Links]

45.Krippner, W. (1992). *Mathematik differenziert unterrichten*. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag. [Links]

46.Krummheuer, G. (1997). *Narrativität und Lernen. Mikrosoziologische Studien zur sozialen Konstitution schulischen Lernens*. Weinheim: Deutscher Studien. [Links]

47.Lauter, J. (1997). *Fundament der Grundschulmathematik*. Donauwörth: Auer. [Links]

48.Lave, J. (1991). *La cognición en la práctica*. Madrid: Paidós. [Links]

49.Leuders, T. (2001). *Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II*. Berlín: Cornelsen. [Links]

50.Manning, M, Manning, G. y Long, R. (2000*). Inmersión temática*. Barcelona (España): Gedisa. [Links]

51.Medina, M., Mora, M. y Riobueno, A. (2003). Actitudes hacia las matemáticas de los estudiantes de 5° y 6° grado de Educación Básica. Manuscrito. Caracas: Universidad Central de Venezuela. [Links]

52.Meyer, H. (1994). *Unterrichtsmethoden*. Berlín: Cornelese. [Links]

53.Moll, L. (1993). *Vygotsky y la educación. Connotaciones y aplicaciones de la psicología sociohistórica en la educación*. Buenos Aires: Aique. [Links]

54. Mora, D. (1998). *Probleme des Mathematikunterrichts in lateinamerikanischen Ländern - explorative empirische Studie zur Entwicklung didaktischer und curricularer Innovationsansätze im Kontext der Educación Popular am Beispiel Nicaragua und Venezuela*. Universidad de Hamburgo. Disponible: http://www.sub.uni-hamburg.de/disse/05. [Links]

55.Mora, D. (2002). *Didáctica de las matemáticas*. Caracas: Ediciones de la Universidad Central de Venezuela. [Links]

56.Mora, D. (2003a). Aspectos pedagógicos y didácticos sobre el método de proyectos. Un modelo para su aplicación en educación matemática. En: Mora, D. *Tópicos en educación matemática*. Caracas: Ediciones Universidad Central de Venezuela. [Links]

57.Mora, D. (2003b). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas basada en las estaciones de trabajo. Mimeografiado. La Paz: Instituto Normal Superior Simón Bolívar. [Links]

58.Mora, D. (2003c). La demostración como aspecto fundamental para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. Mimeografiado. La Paz: Instituto Normal Superior Simón Bolívar. [Links]

59.Mora, D. (2003d). Fundamentos sobre educación matemática. Mimeografiado. La Paz: Instituto Normal Superior Simón Bolívar. [Links]

60.Mora, D. (2003e). Evaluación de los aprendizajes. Un modelo para su aplicación en el aula, especialmente en matemáticas. Mimeografiado. La Paz: Instituto Normal Superior Simón Bolívar. [Links]

61.Mora, D. (2003f). Diferenciación interna en el proceso de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Mimeografiado. La Paz: Instituto Normal Superior Simón Bolívar. [Links]

62.Mora, D. (2003i). Problemas relacionados con la educación matemática. Mimeografiado. La Paz: Instituto Normal Superior Simón Bolívar. [Links]

63.Mora, D. (Ed.) (2003g). *Tópicos en educación matemática*. Caracas: Ediciones de la Universidad Central de Venezuela. [Links]

64.Nesher, P. (2000). Problemas relacionados entre lenguaje natural y lenguaje matemático. En: Gorgorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (Coords.). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 109-124). Barcelona (España): Graó. [Links]

65.Orton, A. (1998). *Didáctica de las matemáticas*. Madrid: Morata. [Links]

66.Pestalozzi, J. H. (1908). *ABC der Anschauung, oder Anschauungs- Lehre der Maßverhältnisse*. Zürich y Berna: Gessner. [Links]

67.Polya, G. (1978). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. [Links]

68.Potthoff, J. y Potthoff, W. (1995). *Freiarbeit und Lernzirkel im Mathematikunterricht der Sekundarstufe*. Freiburg: Reformpädagogischer. [Links]

69.Potthoff, W. (1992). *Grundlage und Praxis der Freiarbeit*. Freiburg: Reformpädagogischer. [Links]

70.Quintero, I. y Mosquera, J. (1997). *Evaluación de los aprendizajes. Selección de Lecturas.*Caracas: Publicaciones de la Universidad Nacional Abierta. [Links]

71.Radatz, H. (1980). *Fehleranalysen im Mathematikunterricht*. Braunschweig: Vieweg. [Links]

72.Reigeluth, C. (2000). *Diseño de la instrucción. Teorías y modelos. Un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción. Partes I y II.* Madrid: Santillana, Aula XXI. [Links]

73.Reverand, E. (2003). Una aproximación a la teoría de la actividad. En: Mora, D. (Ed.), *Tópicos en educación matemática*. Caracas: Ediciones de la Universidad Central de Venezuela. [Links]

74.Rodríguez, S. (1975). *Obras completas. Tomos I y II.* Caracas: Universidad Simón Rodríguez. [Links]

75.Röhr, M. (1997). Kooperatives Lernen im mathematischen Anfangsunterricht. *Grundschule*, 3 (29): 32-34. [Links]

76.Rousseau, J. J. (1968). *Emilio y la educación.* Buenos Aires: El Ateneo. [Links]

77.Salinas, D. (2002). *¡Mañana Examen! La evaluación: entre la teoría y la realidad.* Barcelona (España): Graó. [Links]

78.Sánchez, J. y Fernández, B. (2003). *La enseñanza de la matemática. Fundamentos teóricos y bases psicopedagógicas*. Madrid: CCS. [Links]

79.Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Londres: Academic Press. [Links]

80.Schweiger, F. (1992). Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. *Journal für Mathematik Didaktik*. 13: 199-214. [Links]

81.Serrano, W. (2003). El discurso matemático en el aula. Mimeografiado. Caracas: Universidad Central de Venezuela. [Links]

82.Serres, Y. (2002). La demostración en educación matemática. Mimeografiado. Caracas: Universidad Central de Venezuela. [Links]

83.Skinner, B. F. (1953). *Science and human behaviour*. Nueva York: Free Press. [Links]

84.Skovsmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer. [Links]

85.Steen, L. A. (1998). *La enseñanza agradable de las matemáticas*. México: Limusa. [Links]

86.Stenhouse, L. (1998). *La investigación y desarrollo del curriculum*. Madrid: Morata. [Links]

87.Vaupel, D. (1995). *Das Wochenplanbuch für die Sekundarstufe*. Weinheim y Basel: Beltz. [Links]

88.Voigt, J. (1995). Thematic Patterns of Interaction and Sociomathematical Norms. En: Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Ed.), *The Emergence of Mathematical Meaning. Interaction in Classroom Cultures.*Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. [Links]

89.Vygotsky, L. (1978). *Mind and Society*. Cambridge: Harvard University Press. [Links]

90.Winter, H. (1991). *Entdeckendes Lernen in Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik*. Braunschweig: Deutscher Studien. [Links]

91.Winter, H. (1994). *Mathematik entdecken*. Frankfurt am Main: Cornelsen. [Links]

92.Wittmann, E. C. (1997). *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Wiesbaden: Vieweg. [Links]

93.Woods, P. (1997). *Experiencias críticas en la enseñanza y el aprendizaje*. Madrid: Paidós. [Links]

94.Wussing, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI. [Links]

95.Yackel, E. y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education.* 27 (4): 458-477. [Links]

96.Zumpe, S. (1984). *Der neue Mathematikunterricht in der Grundschule. Eine kritische Analyse auf dem Hintergrund bildungspolitischer Zielvorstellungen Anfang der 70er Jahre*. Berlín: Universidad Técnica de Berlín. [Links]

Notas:

1. En el presente trabajo usaremos con mayor frecuencia el término matemáticas, sobre todo cuando nos referimos a la disciplina y matemática cuando se trate de la materia o asignatura.

2. Intentaremos usar en el presente trabajo, en vez de alumnos(as) y profesores(as), los términos docentes y estudiantes.

3. Se recomienda consultar la obra *Diseño de la instrucción. Teorías y modelos. Un nuevo paradigma de la teoría de la instrucción (Parte I y II),* la cual ha sido editada por Charles M. Reigeluth (2000).

4. Ver la compilación realizada por Luis Moll (1993) sobre Vygotsky y la educación.

5. Es el símbolo que caracteriza a los pueblos preincaicos como el Aymará, el cual se asemeja a una bandera actual. Sin embargo posee otro significado para los pueblos indígenas. Está constituido por una disposición en forma de una matriz cuadrada de 7 columnas y 7 filas de diferentes colores. Ella puede servir como una Temática Generadora de Aprendizajes Matemáticos (TGAM).