Quinta clase: Matemática 3º años (Tercer Lapso) Quinta guía

Contenidos a ser desarrollados:

- **Racionalización**

LEE LAS SIGUIENTES INSTRUCCIONES

A continuación, vas a ver una serie de imágenes, las cuales corresponden con los contenidos anteriormente descritos. Usted deberá desarrollarlos en su cuaderno de clases tal y como lo ves en las imágenes. Esto que allí observas, son las clases de los contenidos que desarrollaremos junto a ustedes en el aula. Tengan en cuenta que los problemas resueltos que les dejo, son modelos de los ejercicios que deben realizar en la guía de ejercicios; obviamente con datos distintos.

Deben escribir todo este contenido en sus cuadernos e investigar lo que allí aparezca como actividad. Nada debe quedar sin desarrollar.

Nota: Ten en cuenta que, por ser apuntes personales, es posible que vean algunas tachaduras o uno que otro error ortográfico. Por tanto, ustedes no deben cometerlos en sus cuadernos.

En el blog deberán descargar la guía de ejercicios, haciendo clic en la imagen, Una vez que culminen de desarrollar toda la clase, comiencen con el desarrollo de la guía. Deberán realizar la mitad más uno de los ejercicios que aparecen allí, de forma aleatoria.

Los criterios e indicadores de evaluación a tener en cuenta son los siguiente (Referido a la evaluación escrita)

* Desarrolla cada uno de los ejercicios propuesto (Enunciados, Datos, Formulas, Diagramas, desarrollo).

* Explica de forma escrita y detallada el proceso para la resolución de cada ejercicio.

* Resultado correcto.

* Muestra el procedimiento correcto en cada ejercicio.

Nota: La guía de ejercicios debe ser entregada a más tardar en la fecha prevista anteriormente. Esta, ***NO*** puede ser enviada al correo, debe ser llevada en Físico al colegio en el momento en que se deba presentar la evaluación escrita. Si usted no cumple con estos lineamientos, corre el riesgo de que su trabajo no sea evaluado de forma apropiada.

La calificación será plasmada en mi blog académico a más tardar 8 días después de la entrega a tiempo de la actividad evaluativa.

A copntinuación dejo el link del blog académico para profundizar en la actividad, en el cual podrá ver videos referidos a los temas de estudio. Solo deberá navegar en el, y buscar el correspondiente. Recuerda que aunque en ese espacio hay algunos videos modelos publicados, no son todos los que existen, usted puede buscar por su cuenta en ***youtube*** y reforzar conocimientos.

https://yosoyfisicamatemat.wixsite.com/fisicamatematica

Racionalización:

La racionalización de radicales consiste en quitar los radicales del denominador, lo que permite que algunas operaciones sean más sencillas. Su objetivo principal es obtener una expresión equivalente sin raíces en el denominador, lo que facilita cálculos y comparaciones en diversos problemas matemáticos.

Casos principales de racionalización:

① Denominador con una raíz cuadrada: Para racionalizar una fracción como $\frac{5}{\sqrt{3}}$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{3}$ (el mismo radical)

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Ahora el denominador es un número racional

② Denominador con suma o resta de raíces:
Si el denominador tiene una expresión como $2+\sqrt{5}$, multiplicamos por su conjugado $2-\sqrt{5}$:

$$\frac{7}{2+\sqrt{5}} = \frac{7}{(2+\sqrt{5})} \cdot \frac{(2-\sqrt{5})}{(2-\sqrt{5})} = \frac{7 \cdot (2-\sqrt{5})}{2^2-5}$$

$$\frac{14-7\sqrt{5}}{4-5} = \frac{14-7\sqrt{5}}{-1}$$

Importancia de la racionalización:

- Permite simplicar cálculos en expresiones algebraicas
- Se usa en límites y derivadas en cálculo.

Tipos de expresiones que se racionalizan

$\frac{a}{b\sqrt{c}}$; $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^n}}$; $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$; $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$

Ejemplos: ⓐ $\frac{5}{\sqrt{3}}$

$$\frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

ⓑ $$\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

ⓒ $$\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2 \cdot 5}}{2(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{10}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

ⓓ $$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Resolver en clases:

① $\sqrt{\frac{5}{6}}$ ② $\frac{5}{\sqrt{8}}$ ③ $\frac{3}{5\sqrt{2}}$

Ejemplos: Cuando en el denominador ya no hay raíz cuadrada

ⓐ $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^1}} \times \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^1 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}$

$= \frac{2\sqrt[3]{25}}{5}$ //

ⓑ $\frac{3}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{3}{\sqrt[5]{3^2}} \times \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}} = \frac{3\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot 3^3}} = \frac{3\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}$

$= \frac{3\sqrt[5]{3^3}}{3} = \frac{3\sqrt[5]{27}}{3}$ //

ⓒ $\sqrt[4]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{3^1}} \times \frac{\sqrt[4]{3^3}}{\sqrt[4]{3^3}} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 3^3}}{\sqrt[4]{3^4}} = \frac{\sqrt[4]{2 \cdot 3^3}}{3}$

$\frac{\sqrt[4]{2 \times 27}}{3} = \frac{\sqrt[4]{54}}{3}$ //

ⓓ $\frac{1}{\sqrt[3]{9}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{9^2}}{\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{9^2}} = \frac{\sqrt[3]{9^2}}{\sqrt[3]{9^3}} = \frac{\sqrt[3]{9^2}}{9}$ //

Resolver en clases:

① $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$ ② $\frac{2}{\sqrt[4]{2}}$ ③ $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

* Ejemplo. cuando en el denominador hay una suma o resta en la raíz (Dentro)

ⓐ $\frac{5}{\sqrt{x+2}} = \frac{5}{\sqrt{x+2}} \cdot \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+2}} = \frac{5\sqrt{x+2}}{\sqrt{(x+2)^2}}$

$\frac{5\sqrt{x+2}}{x+2}$

ⓑ $\sqrt{\frac{x}{x-3}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x-3}} = \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x-3}}{\sqrt{(x-3)^2}}$

$\frac{\sqrt{x(x-3)}}{x-3} = \frac{\sqrt{x^2-3x}}{x-3}$

ⓒ $\frac{2x^3+1}{\sqrt[3]{2x^3+1}} = \frac{2x^3+1}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^1}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}} = \frac{(2x^3+1)(\sqrt[3]{2x^3+1})^2)}{\sqrt[3]{(2x^3+1)^3}}$

$\frac{\cancel{(2x^3+1)}(\sqrt[3]{(2x^3+1)^2})}{\cancel{2x^3+1}} = \sqrt[3]{(2x^3+1)^2}$

Resolver en clases:

① $\dfrac{3}{\sqrt{x^2+1}}$ ② $\sqrt[3]{\dfrac{2}{x+2}}$ ③ $\dfrac{2x+3}{\sqrt{2x+3}}$

Racionalización con Binomio

Se aplica cuando en el denominador hay dos términos separados.
Para ello aplicamos la conjugada, es decir aplicamos la propiedad $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Ejemplo.

ⓐ $\dfrac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} = \dfrac{2}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}-\sqrt{5})} = \dfrac{2(\sqrt{2}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2}$

$\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{2-5} = \dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{-3}$ // Podemos quitar el - del Denominador así

$\dfrac{-(2\sqrt{2}-2\sqrt{5})}{-(-3)} = \dfrac{-2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$ //

ⓑ $\dfrac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \dfrac{5}{(\sqrt{7}-\sqrt{2})} \cdot \dfrac{(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})} = \dfrac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2}$

$$= \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} \quad \frac{\cancel{5}(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{\cancel{5}} = \sqrt{7}+\sqrt{2}$$

Resolver en clase:

① $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ ② $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

Ejemplo: Cuando en el denominador, uno de los terminos no tiene raiz

ⓐ $$\frac{5}{3-\sqrt{2}} = \frac{5}{3-\sqrt{2}} \cdot \frac{(3+\sqrt{2})}{3+\sqrt{2}} = \frac{5(3+\sqrt{2})}{(3)^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$\frac{5(3+\sqrt{2})}{9-2} = \frac{5(3+\sqrt{2})}{7} = \frac{15+5\sqrt{2}}{7}$$

Resolver en clase.

① $\frac{2}{5-\sqrt{5}}$ ② $\frac{5}{\sqrt{3}-4}$

Ejemplo de Ejercicios donde se aplica conjugadas:

ⓐ $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} \cdot \dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}$

$\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{3-5} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{-2} = \dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}$

ⓑ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{6}} = \dfrac{3\sqrt{3}}{(2\sqrt{3}-\sqrt{6})} \cdot \dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{6})}{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2} = \dfrac{6\sqrt{3^2}+3\sqrt{6\cdot 3}}{4\cdot 3-6}$

$= \dfrac{6\cdot 3+3\sqrt{18}}{12-6} = \dfrac{18+3\sqrt{3^2\cdot 2}}{6} = \dfrac{18+3\cdot 3\sqrt{2}}{6}$

$= \dfrac{18+9\sqrt{2}}{6} = \dfrac{3(6+3\sqrt{2})}{6} = \dfrac{6+3\sqrt{2}}{2}$

Resolver en clases

$\dfrac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-4}$

Ejemplos diversos de racionalización

ⓐ $$\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{(3+\sqrt{x})} \cdot \frac{(3-\sqrt{x})}{(3-\sqrt{x})} = \frac{\sqrt{x}\,(3-\sqrt{x})}{3^2-(\sqrt{x})^2}$$

$$\frac{3\sqrt{x}-\sqrt{x^2}}{9-x} = \frac{3\sqrt{x}-x}{9-x}$$

ⓑ $$\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{3}-\sqrt{2+x}} = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{3}-\sqrt{2+x}} \cdot \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2+x})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2+x})}$$

$$\frac{\sqrt{2-x}\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2+x})}{(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2+x})^2} = \frac{\sqrt{(2-x)3}+\sqrt{(2-x)(2+x)}}{3-(2+x)}$$

$$\frac{\sqrt{6-3x}+\sqrt{2^2-x^2}}{3-2-x} = \frac{\sqrt{6-3x}+\sqrt{4-x^2}}{1-x}$$

Resolver en clases:

ⓐ $$\frac{5}{\sqrt{x}-2}$$

ⓑ $$\frac{\sqrt{3-2x}}{\sqrt{4}-\sqrt{2+x}}$$

Ejemplos: Cuando en el denominador hay un trinomio.

ⓐ $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{3}}{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}]} \cdot \dfrac{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}$

$\dfrac{\sqrt{3}[(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}]}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{3^2}-\sqrt{15}}{\underbrace{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}-5}$

Resolvemos Aplicando la Propiedad $(a+b)^2 = a^2+2.a.b+b^2$

$\dfrac{\sqrt{6}+3-\sqrt{15}}{(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}.\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-5}$

$\dfrac{\sqrt{6}+3-\sqrt{15}}{2+2\sqrt{6}+3-5} = \dfrac{\sqrt{6}+3-\sqrt{15}}{2+2\sqrt{6}-2} = \dfrac{\sqrt{6}+3-\sqrt{15}}{2\sqrt{6}}$

Aplicamo Racionalización

$\dfrac{(\sqrt{6}+3-\sqrt{15})}{2\sqrt{6}} \cdot \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6^2}+3\sqrt{6}-\sqrt{15\times 6}}{2.\sqrt{6^2}}$

$\dfrac{6+3\sqrt{6}-\sqrt{90}}{2.6} = \dfrac{6+3\sqrt{6}-\sqrt{2.3^2.5}}{12}$

$\dfrac{6+3\sqrt{6}-3\sqrt{10}}{12} = \dfrac{3(2+\sqrt{6}-\sqrt{10})}{12}$

$\dfrac{2+\sqrt{6}-\sqrt{10}}{4}$ //

Resolver en Clases.

ⓐ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$ ⓑ $\frac{3}{2-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

ⓒ $\frac{-\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$

Ecuaciónes con radicales

Para resolver este tipo de ecuaciónes, procedemos de la misma forma, que hacíamos en las ecuaciones lineales.

Ejemplo:

① $7+\sqrt[3]{5x-2}=9$

$\sqrt[3]{5x-2}=9-7 \Rightarrow \sqrt[3]{5x-2}=2 \Rightarrow (\sqrt[3]{5x-2})^3=(2)^3$

$5x-2=2^3 \Rightarrow 5x-2=8 \Rightarrow 5x=8+2$

$5x=10$

$x=\frac{10}{5}=2$

② $3+\sqrt{3x+1}=x$

$\sqrt{3x+1}=x-3 \Rightarrow (\sqrt{3x+1})^2=(x-3)^2$

$3x+1 = x^2 - 2x \cdot 3 + 9 \Rightarrow 3x+1 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 6x + 9 = 3x + 1 \Rightarrow x^2 - 6x - 3x = 1 - 9$

$x^2 - 9x = -8$

$x^2 - 9x + 8 = 0$

$(x-8)(x-1)$

$x - 8$ || $x - 1$

$x = 8$ || $x = 1$

③ $2x - \sqrt{x+7} = 1$

$2x - 1 = \sqrt{x+7} \Rightarrow (2x-1)^2 = (\sqrt{x+7})^2$

$(2x)^2 - 2(2x \cdot 1) + 1^2 = x + 7$

$4x^2 - 4x + 1 = x + 7 \Rightarrow 4x^2 - 4x - x + 1 - 7 = 0$

$4x^2 - 5x - 6 = 0$ Resolvemos aplicando la Ecuación Cuadrática

$a = 4$; $b = -5$; $c = -6$ $ax^2 + bx + c = 0$ Donde su ecuación es: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-6)}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 96}}{8} = \frac{5 \pm \sqrt{121}}{8}$

$x = \frac{5 \pm 11}{8}$ Buscamos los valores de "x"

$x_1 = \frac{5+11}{8}$ | $x_2 = \frac{5-11}{8}$

$x_1 = \frac{16}{8}$ | $x_2 = -\frac{6}{8}$

$x_1 = 2$ | $x_2 = -\frac{3}{4}$

Resolver en Clases.

(a) $x + \sqrt{4-3x} = 2$ (b) $3x + 2\sqrt{3x+1} = 7$

(b) $3x + 2\sqrt{3x+1} = 7$

$2\sqrt{3x+1} = 7 - 3x \Rightarrow \sqrt{3x+1} = \frac{7-3x}{2}$

$(\sqrt{3x+1})^2 = \left(\frac{7-3x}{2}\right)^2 \Rightarrow 3x+1 = \frac{7^2 - 2(7\cdot 3x) + (3x)^2}{4}$

$4(3x+1) = 49 - 42x + 9x^2 \Rightarrow 12x + 4 = 9x^2 - 42x + 49$

$9x^2 - 42x - 12x + 49 - 4 = 0$

$9x^2 - 54x + 45 = 0$ → Simplificamos Hallando factor Común y diviendo entre ese factor Común

$9(x^2 - 6x + 5) = 0$

$\frac{9(x^2 - 6x + 5)}{9} = \frac{0}{9}$

$x^2-6x+5=0$ // $x-5=0$ // $x-1=0$

$(x-5)(x-1)$ // $x=5$ // $x=1$

(4) $\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x}=7$

$\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x}\right)^2=7^2$ → Aplicamos Propiedad

$\left(\sqrt{x+5}\right)^2+2\left(\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{20-x}\right)+\left(\sqrt{20-x}\right)^2=49$

$\cancel{x}+5+2\left(\sqrt{(x+5)(20-x)}\right)+20-\cancel{x}=49$

$25+2\left(\sqrt{20x-x^2+100-5x}\right)=49$

$25+2\left(\sqrt{15x-x^2+100}\right)=49$

$2\sqrt{-x^2+15+100}=49-25$

$2\sqrt{-x^2+15x+100}=24$

$\sqrt{-x^2+15x+100}=24/2 \Rightarrow \sqrt{-x^2+15x+100}=12$

$\left(\sqrt{-x^2+15x+100}\right)^2=12^2$

$-x^2+15x+100=144$

$-x^2+15x+100-144=0$

$-x^2+15x-44=0$ Multiplicamos por Menos 1

$x^2-15x+44=0$

$(x-11)(x-4)$

$x-11=0$
$x=11$

$x-4=0$
$x=4$

Resolver en clases:

① $\sqrt{4-x}+\sqrt{1+x}=3$ ② $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x+3}=\sqrt{5x+6}$

Resolución de ecuaciones radicales cuando los índices de las raíces son diferentes

Ejemplo:

$\sqrt[3]{x+3}=\sqrt{x-1}$

Buscamos el M.C.M de

3	2	2
1	1	3

M.C.M = 6

$\sqrt[2\times3]{(x+3)^2}=\sqrt[3\times2]{(x-1)^3}$

$\sqrt[6]{(x+3)^2}=\sqrt[6]{(x-1)^3} \Rightarrow \left(\sqrt[6]{(x+3)^2}\right)^6=\left(\sqrt{(x-1)^3}\right)^6$

$(x+3)^2=(x-1)^3$
$x^2+6x+9=(x-1)(x^2-2x+1)$
$x^2+6x+9=x^3-2x^2+x-x^2+2x-1$

$$x^2+6x+9 = x^3-3x^2+3x-1$$

$$x^3-3x^2+3x-x^2+6x-1-9=0$$

$$x^3-4x^2+9x-10=0$$

Si ya has llegado hasta acá y terminaste de realizar las actividades en su cuaderno.

No aceptaré trabajo enviados al correo.

Profe: Juan Sánchez